EUCLIDES

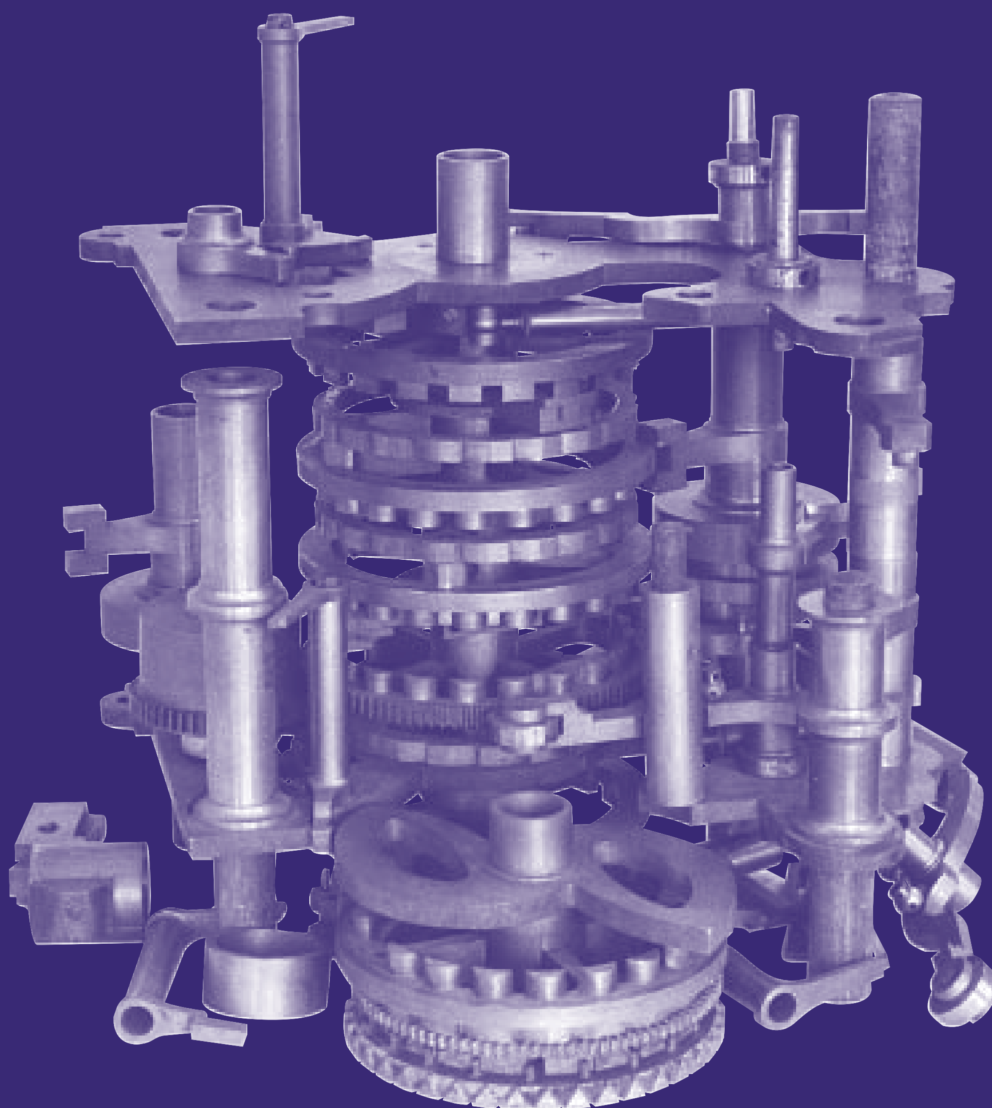
Vakblad voor de wiskundeleraar

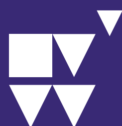
Algebra
Gelijkvormigheid
ICT

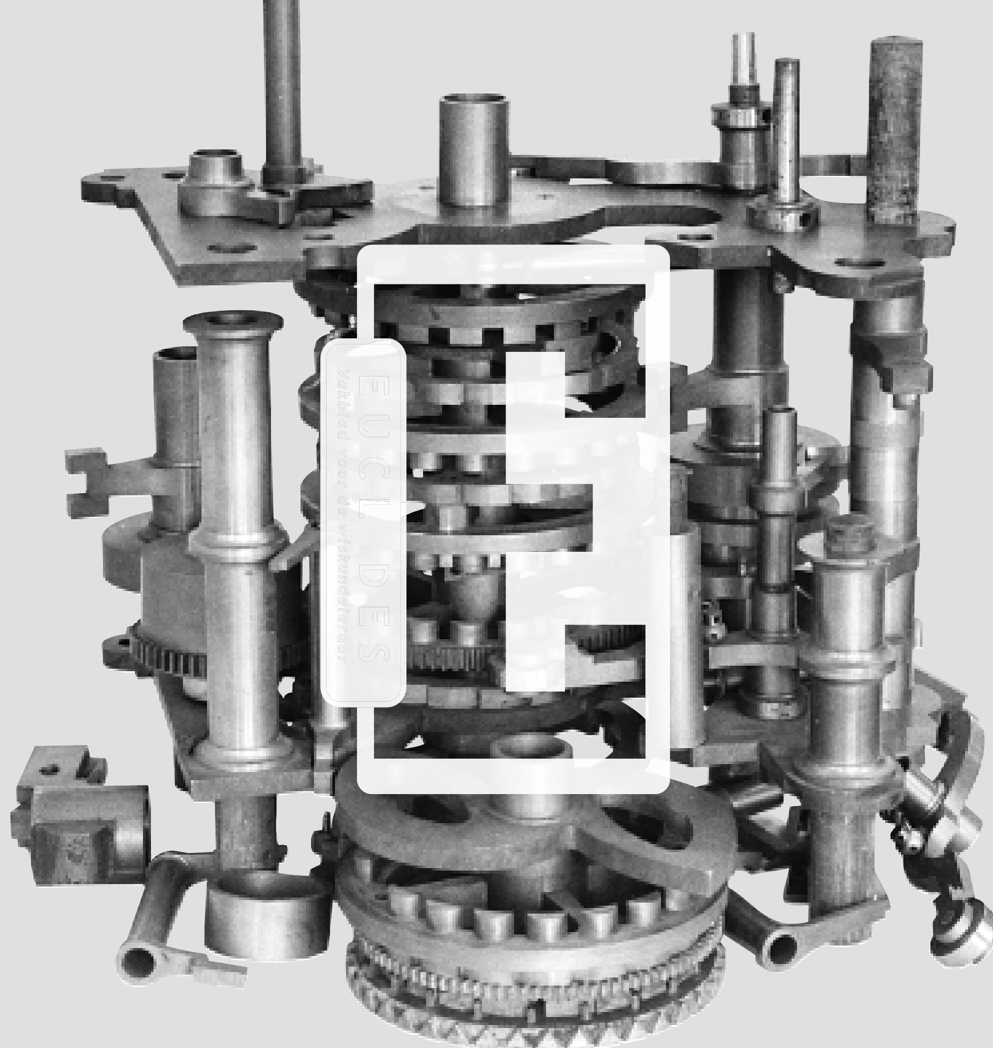
oktober

2004/nr.2

jaargang 80







Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Inzending bijdragen

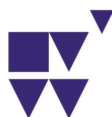
Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren, op papier in drievoud.
Illustraties, foto´s en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl



Voorzitter:
Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: m.kollenveld@nvvw.nl

Secretaris:
Wim Kuipers,
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: w.kuipers@nvvw.nl

Ledenadministratie:
Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
productie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie per verenigingsjaar

Het lidmaatschap is inclusief Euclides.
Leden: € 45,00
Studentleden: € 25,00
Gepensioneerden: € 30,00
Leden van de VVWL: € 30,00
Lidmaatschap zonder Euclides: € 30,00
Bijdrage WwF: € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 50,00
Instituten en scholen: € 130,00
Losse nummers, op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Gert de Kleuver
De Splitting 24, 3901 KR Veenendaal
e-mail: g.de.kleuver@wanadoo.nl
tel. 0318-542243

Indien afwezig:
Freek Mahieu
Dommeldal 12, 5282 WC Boxtel
e-mail: freek.mahieu@hetnet.nl
tel. 0411-673468

2

oktober 2004 JAARGANG 80

INHOUD

Aan dit nummer werkte verder mee:
Jan Smit.

Voorpagina:
Onderdeel van de “Difference Engine No. I”
Tussen 1824 en 1832 gebouwd door Joseph Clement naar een ontwerp van Charles Babbage
Museum of the History of Science, Oxford

Van de redactietafel

[Marja Bos]

Profielcommissies havo/vwo

Het heeft een tijd geduurd, maar inmiddels is dan toch één van de twee profielcommissies geïnstalleerd, namelijk die voor de natuurprofielen. Op het moment dat ik dit stukje schrijf, was de samenstelling van de maatschappij-profielcommissie nog steeds niet rond.
De profielcommissies moeten de minister vóór 1 januari a.s. (!) adviseren over onder meer globale vakinhouden en vernieuwing op de langere termijn. Daarbij staat overigens niet meer ter discussie met welke vakken de profielen ingevuld zullen worden en welke studielast daarbij hoort – dat is immers vastgelegd in het ‘februari-akkoord’. (De schema’s zijn te downloaden via *www.tweedefase-loket.nl*.)
De commissies krijgen daarnaast de taak te adviseren over principes met betrekking tot de doorstroming naar het hoger onderwijs en de afstemming aldaar op vernieuwingen in het voortgezet onderwijs.
De natuurprofielcommissie zal zich bovendien buigen over de toekomstige status van het nieuwe geïntegreerde bètavak (dat voorlopig slechts de status heeft van profielkeuzevak voor zowel N&T als N&G, naar keuze van de school al dan niet in te voeren): kan dit vak op termijn een voor N&T verplicht profielvak worden? Verder zal gekeken worden naar een geschikte inhoud van de wiskundevakken B (voor N&T) en AB (voor N&G en E&M) met het oog op de doorstroming naar bètavervolgstudies.
De maatschappijprofielcommissie moet er mede op gaan toezien dat in het vwo-C&M-profiel het verplichte vak wiskunde A niet onnodig belemmerend zal werken.

Anders leren - didactiek

Steeds meer scholen proberen vorm te geven aan ‘het nieuwe leren’. Dat begrip is niet heel scherp afgebakend, maar een aantal uitgangspunten zijn in de diverse beschrijvingen steeds weer terug te vinden.
- Onderwijs vanuit het nieuwe leren wordt vooral vraaggestuurd ingericht: uitgangspunt is de eigen interesse van de lerende (leerling, student); de lerende en diens leerbehoeften staan dan ook centraal en niet het onderwijsaanbod;
- die lerende is dan ook degene die initiatieven neemt in het leerproces, hij of zij maakt persoonlijke keuzes in de aanpak, in de ‘weg’ en soms ook in de leerstofinhouden;
- het leren wordt zo mogelijk gerealiseerd binnen min of meer authentieke situaties, en is veelal gericht op toepassingen;
- de nadruk ligt sterker op de verwerving van vaardigheden en competenties dan op kennis als zodanig;
- de docent heeft een coachende rol.

Deze ideeën zijn beslist niet allemaal even *nieuw*, maar ze kunnen wel degelijk leiden tot *anders* leren, en dat zien we de laatste jaren dan ook volop gebeuren: op een groeiend aantal Nederlandse scholen wordt het onderwijs (of eigenlijk: het leren door de leerling!) op z’n minst ‘anders’ georganiseerd.
De uitwerking van de uitgangspunten rond het nieuwe leren is overigens heel divers: van inmiddels min of meer ingeburgerde vormen van zelfstandig leren, tot sterk afwijkende aanpakken zoals die van de ‘Iederwijs’-scholen waarbij het initiatief tot (het moment van) leren volledig aan het kind wordt gelaten.
Het is, op z’n minst, interessant al deze ontwikkelingen goed te volgen, en jezelf weer eens af te vragen welke leerdoelen je nu eigenlijk écht belangrijk vindt, en op welke manieren die doelen verwezenlijkt kunnen worden.
Dat bij allerlei onderwijsveranderingen het denken over de didactiek overigens nogal eens achterloopt op het denken over de organisatie lijkt me een punt van zorg. Aan de andere kant: daar zijn we allemaal zelf bij! Hoog tijd dus om met z’n allen mee te denken en de ontwikkelingen ook didactisch in goede banen te leiden, hoog tijd om onze aandacht te richten op wellicht aangepaste maar in ieder geval goed doordachte en adequate wiskundedidactiek.

In 2003 stond in het eindexamen havo wiskunde-A12 een opgave over de productiekosten en opbrengst van teddyberen.

De totale kosten zijn gegeven door $TK = 0{,}1q^3 - q^2 + 6q + 6$ en de totale opbrengst door $TO = 6q$. Ook de formule $W = TK - TO$ voor de winst was gegeven. Hierbij is q het aantal geproduceerde teddyberen in duizendtallen. De bedragen zijn in duizenden euro.

Vervolgens werden de volgende vragen gesteld:

1. Bereken de winst bij een productie van 5000 teddyberen.

(Na een figuur met de grafieken van TK en TO voor q tussen 0 en 10:)

2. Bereken bij welke productie er geen winst of verlies wordt gemaakt.
3. Gebruik de figuur om te schatten bij welke productie de winst maximaal is.

(En tenslotte, en daar gaat het hier om:)

4. Stel W' op en bereken daarmee de productie waarbij de winst maximaal is.

FIGUUR 1

ALGEBRA: VERLOREN ZAAK OF UITDAGING?

Deel 2 – De problematiek in kaart gebracht

[Bert Zwaneveld]

Inleiding

Op 17 april 2004 vond in het kader van het Nederlands-Belgisch Mathematisch Congres 2004 een mini-symposium over didactiek van de wiskunde onder bovenstaande titel plaats. Tamelijk algemeen worden de algebraïsche vaardigheden van eerstejaars studenten, zowel op de universiteit als in het hbo, op dit moment als ontoereikend ervaren. Bert Zwaneveld bracht de problematiek in kaart, Dirk Janssens gaf een aantal voorbeelden van situaties waarin leerlingen 'symbol sense' kunnen ontwikkelen en van een mogelijke bijdrage van een computeralgebrasysteem, en Metha Kamminga leidde tot slot een discussie met de zaal. In Euclides 79 (8), juni 2004, heeft een verslag van deze discussie gestaan van de hand van Metha Kamminga alsmede een aantal van haar ervaringen met algebra in het technisch onderwijs van het hbo. In een volgend nummer zal de bijdrage van Dirk Janssens verschijnen.

Hoe erg is de problematiek?

Om de problematiek rond de algebra in het voortgezet onderwijs te introduceren begin ik met enkele voorbeelden, ontleend aan het eindexamen van 2003.

Voorbeeld 1, ontleend aan havo wiskunde-A12

Zie figuur 1.

De resultaten op deze vragen staan in tabel 1. (N.B. De *p'*-waarde van een vraag is het gemiddeld aantal behaalde scorepunten gedeeld door het maximaal aantal te behalen scorepunten.)

vraag	1	2	3	4
p '	0,86	0,50	0,56	0,18

Tabel 1 Scoreresultaten havo wiskunde-A12

Mijn eerste beoordeling van deze resultaten is als volgt. Invullen en uitrekenen (vraag 1) –ik neem aan met de grafische rekenmachine– lukt, het oplossen van een vergelijking (vraag 2) met de grafische rekenmachine gaat niet echt goed, een figuur aflezen (vraag 3) een fractie beter, maar differentiëren, afgeleide nul stellen en oplossen (vraag 4) gaat heel slecht.

Uit de examenbesprekingen in juni 2003 met de leraren, georganiseerd door de NVvW, kwam naar voren dat de kandidaten bij vraag 4 soms nog wel correct de twee veeltermen, verbonden door een minteken, opschreven, soms zelf haakjes daarbij gebruikten, daarna correct term voor term gingen differentiëren en dan stopten. Dus niet: haakjes (eventueel niet opgeschreven) wegwerken, en niet: gelijksoortige termen samennemen, voor of na het differentiëren - laat staan dat ze aan het met de grafische rekenmachine oplossen van $W' = 0$ toekwamen. En het gaat hier toch om een standaard vraag, die de kandidaten vaak in hun boek gezien hebben en die ze ook zeker een aantal keren geoefend hebben. Bovendien werd zo ongeveer voorgezegd wat ze moesten doen.

Dat er veel mis is met de vaardigheden waarover afgestudeerden van de havo met wiskunde-A12 beschikken, blijkt ook nog uit het volgende. In november 2003 was ik op een dag van hbo-docenten wiskunde (technisch, economisch, bedrijfskundig en administratief onderwijs), georganiseerd door Wolters-Noordhoff, uitgever van een belangrijke wiskundemethode voor het hbo. Deze wiskundeleraren rapporteerden allen dat zij met dezelfde problemen zitten: het elementaire algebraïsche handwerk wordt door hun studenten niet beheerst en dat is noodzakelijk voor het verwerken van de leerstof. En van veel wiskundedocenten op de universiteiten komt een vergelijkbare klacht.

Voorbeeld 2, ontleend vwo wiskunde-B1 en -B12

Zie figuur 2.

De resultaten op deze negen vragen staan in tabel 2.

vraag	1	2	3	4	5
p '	0,96	0,72	1 (*)	0,56	0,41

vraag	6	7	8	9
p '	0,81 (0,81)	0,49 (0,39)	0,62 (0,42)	0,56 (0,35)

(*) fout in opgave

Tabel 2 Scoreresultaten vwo wiskunde-B12 (tussen haakjes de scoreresultaten B1)

Tabel 2 brengt mij tot volgende opmerkingen over de B12-kandidaten. Invullen en uitrekenen (vraag 1) gaat, niet onverwacht, zeer goed. Het verwerken van de optredende periodiciteit (vraag 2) lukt ook nog alleszins redelijk. Algebraïsch manipuleren (vraag 4) lukt een stuk minder. En datgene waar het uiteindelijk om gaat (vraag 5) lukt niet echt goed, misschien mede door de afhankelijkheid van vraag 4. (Ik ga hier niet verder op in, want het gaat me hier niet om de toetskundige aspecten maar om de algebraïsche vaardigheden.)

Voor beide groepen kandidaten, B12 en B1, kan ik het volgende opmerken. Een exponentiële vergelijking oplossen (vraag 6) gaat alleszins redelijk. Maar het differentiëren van een exponentiële functie met twee parameters en vervolgens via gelijkstellen die parameters berekenen (vraag 7) lukt niet echt. Integraalrekening op een elementair niveau toepassen (vraag 8) lukt bij de kandidaten wiskunde B12 redelijk, bij de B1-kandidaten een heel stuk minder. De 'integralere' toepassing van de integraalrekening (vraag 8) laat eenzelfde beeld zien.

Het gaat nu natuurlijk om twee vragen:

- Wat is hier precies aan de hand?
- En, als we enigszins zicht op een antwoord op de vorige vraag hebben, wat doen we hieraan?

Een voorbeeld ontleend aan een eindexamen voor de sterkste groep leerlingen, vwo wiskunde-B12 (2003):

Gegeven is de volgende rij:

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_n = \dfrac{1+u_{n-1}}{1-u_{n-1}} \end{cases}$$

In de eerste twee vragen is de startwaarde $a = 2$. Bij deze startwaarde was ook de webgrafiek van de rij gegeven. De vragen waren:

1. Bereken u_1, u_2, u_3 en u_4.
2. Bereken u_{999999}. Licht je antwoord toe.

(Nadat gemeld is dat bij bijvoorbeeld de startwaarde $a = 0$ de rij afbreekt omdat dan een term niet gedefinieerd is, wordt gevraagd:)

3. Voor welke twee andere startwaarden is dat ook het geval?

(Vervolgens wordt er alleen gewerkt met startwaarden a waarbij de rij niet afbreekt.)

4. Toon langs algebraïsche weg aan dat de uitdrukking die je voor u_2 krijgt kan worden vereenvoudigd tot $\dfrac{-1}{a}$.

(Nu u_2 gevonden is, kan ook u_4 gevonden worden.)

5. Toon aan dat $u_4 = a$.

In een andere (contextrijke) opgave van ditzelfde examen ging het over het gewicht z van zomertarwe. (Deze opgave zat in dezelfde vorm in het eindexamen-B1 waarvan de stof een echte deelverzameling van de stof voor het eindexamen-B12 is.) Van dat gewicht was de groeisnelheid (in kg/dag) over de periode van 1 april ($t = 0$) tot en met 30 juli ($t = 120$) gegeven door het volgende model:

Fase 1: exponentiële groei, voor $0 \leq t < 40$ geldt: $z'(t) = 100 \cdot e^{0{,}1(t-40)}$

Fase 2: lineaire groei, voor $40 \leq t < 100$ geldt: $z'(t) = 100$

Fase 3: exponentiële groei, voor $100 \leq t < 120$ geldt: $z'(t) = 100 \cdot e^{-0{,}2(t-100)}$

Ook was de grafiek van z' gegeven.
Er waren de volgende vragen:

6. Bij elk tijdstip t_1 in fase 1 is er een tijdstipt t_3 in fase 3 waarop de tarweplanten even snel groeien als op t_1. Bereken t_3 exact als $t_1 = 18$.

(Met het geven dat de hoeveelheid zaaigoed 30 kg was, en dus $z(0) = 30$, en dat er getallen a en b bestaan, zodat voor fase 1 geldt: $z(t) = a \cdot e^{0{,}1(t-40)} + b$, moest de volgende vraag beantwoord worden:)

7. Bereken a en b. Rond de waarde van b af op twee decimalen.

(Verder was gegeven dat op elk tijdstip t het gewicht te bepalen is met $z(t) = z(0) + \int_0^t z'(s)\,ds$.)

8. Toon aan dat $z(100) \approx 7011{,}68$.
9. Bereken het gewicht van de tarweplanten op 30 juli.

FIGUUR 2

Alvorens op deze twee vragen in te gaan geef ik nog wat achtergrondinformatie. Want, dat moge duidelijk zijn, de problematiek van de algebra lijkt algemeen te zijn, maar wat de leerlingen in welke omstandigheden precies moeten kennen en kunnen verschilt. Zo is wiskunde-A globaal gesproken gericht op alfa- en gamma-vervolgopleidingen en wiskunde-B (eveneens globaal gesproken) op bèta-vervolgopleidingen, en wiskunde op havo gericht op wiskunde in het hbo en wiskunde op vwo op wiskunde op de universiteit. Bovendien is er dan nog het onderscheid tussen wiskunde-A1/wiskunde-A12 en wiskunde-B1/ wiskunde-B12: het eerste is een deelverzameling van het tweede (behalve bij havo-B). En een belangrijk aspect is de beperkte beschikbare tijd om het programma uit te voeren. In zowel wiskunde-A als wiskunde-B zitten contextrijke opgaven. Ook dat kost tijd die niet beschikbaar is om bijvoorbeeld elementaire algebraïsche vaardigheden te oefenen. De problematiek van de algebraïsche vaardigheden speelt, gezien de vervolgopleidingen, voor wiskunde-B scherper dan voor wiskunde-A, want daar zijn deze vaardigheden veel nadrukkelijker vereist. Maar ook voor wiskunde-A is er echt wel wat aan de hand. Denk maar eens aan economie studeren op universitair niveau.

Wiskunde zonder algebraïsche vaardigheden beoefenen op school en daarna is natuurlijk ondenkbaar, de vraag is echter steeds: tot hoe ver moeten we daarbij gaan. Een vraag die volgens mij alleen in goed onderling overleg tussen de tweede fase en het vervolgonderwijs oplosbaar is, waarbij alle aspecten –inclusief de computeralgebra– worden meegenomen. Dat lijkt mij typisch iets voor de herijking van de tweede fase.

Analyse van de voorbeelden

In het artikel van Metha Kamminga is een kader voor de problematiek gegeven; zie figuur 3. Het is ontleend aan het proefschrift van Paul Drijvers over het gebruik van computeralgebra.

Voorbeeld 1

De problematiek van de eindexamenvraag in voorbeeld 1 naar de maximale winst zou wel eens alles met het derde punt te maken kunnen hebben. De reacties van de leraren lijken erop te wijzen dat leerlingen wel deelstappen kunnen uitvoeren (formule samenstellen, term voor term differentiëren, in principe de grafische rekenmachine gebruiken voor het oplossen van $W' = 0$), maar niet in staat zijn de hele oplossings-strategie uit te voeren, die bestaat uit een sequentie van dergelijke stappen. Is dit een kwestie van de rode draad uit het oog verliezen? Besteden we te weinig aandacht aan het globaal bespreken van een 'stappen-plan' om zo'n opgave aan te pakken? Is het combineren van verschillende stappen moeilijker dan we denken?

Voorbeeld 2

Over de vragen 4 en 5 met relatief lage p$'$-waarden kan ik het volgende opmerken. Ik vermoed dat het in ieder geval om het tweede en vijfde punt gaat: concreet gaat het hier om een rij waarvoor geldt dat je voor alle startwaarden, afgezien van drie bijzondere, na vier stappen terug bent bij de startwaarde. Dit lijkt heel concreet maar is op zichzelf natuurlijk al een uitspraak op een hoog abstractieniveau. Ik interpreteer vraag 2 als een opstapje voor de leerlingen om zelf deze 'concretisatie' op hoog abstractieniveau te maken. Hoe dit ook zij, of ze deze stap nu wel of niet gemaakt hebben, bij vraag 4 en 5 moeten ze in ieder geval de uitdrukking $\frac{1+x}{1-x}$ als een zelfstandig object zien en dit en het resultaat een aantal malen voor x in $\frac{1+x}{1-x}$ substitueren (punt 5).

Kennelijk gaat bij vraag 6 het opstellen en oplossen van de vergelijking $100 \cdot e^{-0,2(t-100)} = 100 \cdot e^{0,1(t-40)}$, waarbij in het rechterlid voor t de waarde 18 ingevuld moet worden, redelijk goed.
Bij vraag 7, waar de waarden van a en b bepaald moeten worden en die niet echt goed is gemaakt, is -naar ik vermoed- het probleem hoe de vraag moet worden aangepakt: de variabelen a en b zijn para-meters die zo bepaald moeten worden dat de afgeleide van z naar t gelijk is aan de gegeven functie op het juiste interval. Ik kan dit niet precies aan de vijf probleemaspecten uit het proefschrift relateren, maar ik denk dat ze alle vijf een rol spelen. Overigens, bij deze en de volgende twee vragen is het strikt algebraïsche terrein verlaten, maar er zitten aan differentiëren en integreren uiteraard veel algebraïsche aspecten, zeker in de schoolwiskunde.
Bij de vragen 8 en 9 gaat het weer om punt drie: een routekaart bepalen en die vasthouden, terwijl onder-weg een aantal keren algebraïsche 'zijwegen' tot een goed einde moeten worden afgelegd.
Opgemerkt moet natuurlijk wel worden dat de vragen 7, 8 en 9 gekoppeld zijn. Misschien verklaart dat ook nog een deel van de relatief lage p'-waarden. Maar nogmaals, het gaat me hier niet om de toetskundige aspecten maar om de algebraïsche vaardigheden.

Vervolgvragen

Er zijn in mijn ogen nu twee relevante vervolgvragen:
- Zijn het leerplan en het examenprogramma adequaat om tot een verbetering van de situatie te komen?
- Hoe kunnen de moderne elektronische hulpmiddelen een bijdrage leveren?

Over wiskunde-A wil ik het volgende opmerken.
Het gaat er op algebraïsch gebied uiteindelijk om dat de leerlingen het volgende moeten kunnen in contextueel gebonden probleemsituaties. Ideaal gesproken zou zo'n probleemsituatie door de kandidaten wiskundig gemodelleerd moeten worden, en wel zo dat het probleem opgelost kan worden. In de praktijk van het onderwijs in wiskunde-A betekent dit modelleren het opstellen van een formule. Dat is erkend lastig, zoals bij de invoering van HEWET, in de jaren tachtig, is gebleken, onder andere wegens de

Op 25 september van het vorig jaar is Paul Drijvers gepromoveerd op het proefschrift *Learning algebra in a computer algebra environment, Design research on the understanding of the concept of parameter*.
Over de moeilijkheid van algebra merkt Drijvers het volgende op.
Welke betekenis heeft een formule of een algebraïsche uitdrukking voor een leerling: is de formule of uitdrukking volledig aan een context gekoppeld, is daar al enigszins van geabstraheerd tot een wiskundig object; wordt de formule of uitdrukking gezien als procedure van (rekenkundige) bewerkingen dat uitgevoerd moet worden of is het een op zichzelf staand wiskundig object geworden? Daarnaast zijn er de taalaspecten (algebra als een soort formele taal met alleen een syntax en eigenlijk geen semantiek) en verder het voortdurende proces van abstractie en van formalisering.
In het proefschrift worden de volgende vijf aspecten van de onderhavige problematiek rond algebra geïdentificeerd:

1. Het formele, algoritmische karakter van algebraïsche procedures waardoor de leerling geen relatie kan leggen met informele, betekenisvolle benaderingen.
2. Het abstracte niveau waarop de problemen worden opgelost, abstract in vergelijking met de concrete situaties van die problemen, waardoor de leerling geen betekenis aan de wiskundige objecten kan geven op dat abstracte niveau.
3. De noodzaak om het verloop van het totale proces van oplossen goed in de gaten te houden bij het uitvoeren van de elementaire algebraïsche procedures die een onderdeel van dat totale proces zijn.
4. De compacte algebraïsche taal met de specifieke conventies en symbolen.
5. Het objectkarakter van algebraïsche formules en uitdrukkingen, terwijl de leerling die vaak opvat als een opdracht die verder 'uit te rekenen'. Dit heet wel het *lack of closure* obstakel. De leerlingen denken dan dat een algebraïsche uitdrukking als $2a + 1$ niet af is en verder 'uitgerekend' moet worden zoals ze gewend zijn met rekenkundige uitdrukkingen als $2 \cdot 7 + 1$.

FIGUUR 3

keuze van de variabele(n). Hoe wordt hier in de praktijk mee omgegaan?
Alleen in eenvoudige situaties, met lineaire of exponentiële verbanden, moeten de kandidaten het modelleren zelf doen. Anders wordt het model gegeven, soms moeten ze laten zien dat uit de gegevens het model volgt, soms moet een gegeven model beoordeeld worden. Een andere benadering is dat het model met een of meer parameters wordt gegeven. Die waarden van de parameters moeten de kandidaten zelf bepalen volgens een gegeven criterium. En ten slotte moeten ze soms modellen vergelijken op basis van een of ander gegeven criterium.
Dan komt de wiskundige bewerking binnen het model met de volgende activiteiten: invullen van getallen voor de variabelen, vergelijkingen of ongelijkheden oplossen, een functie optimaliseren met de grafische rekenmachine of analytisch.
En als laatste moeten de kandidaten soms het resultaat, lees: de uitkomst, van de wiskundige bewerking beoordelen in het licht van de context en het probleem. Hierbij speelt op dit moment de grafische rekenmachine een belangrijke rol. Op allerlei perikelen rond die grafische rekenmachine ga ik hier niet in. De formele wiskunde (algebra en een beetje differentiëren) zit er op twee manieren in:
- formules naar je hand zetten om het leven, bijvoorbeeld bij het invoeren in de grafische rekenmachine, te vereenvoudigen;
- differentiëren.
In feite is het noodzakelijke 'formeel' manipuleren in het programma voor wiskunde-A beperkt tot het differentiëren. En het is daarmee tot een 'uithoek' van het programma gereduceerd. Dat weten de kandidaten en ze gedragen zich er ook naar. Echt adequaat is het programma dus niet.

Computeralgebra zal steeds meer gebruikt gaan worden. En de didactische vraag is: hoe? Het antwoord ligt zeker niet in toepassing van het dogma 'eerst met de hand, dan pas met computeralgebra'. Het proefschrift van Paul Drijvers laat zien dat het werken met computeralgebra aanleiding kan zijn tot herbezinning en conceptuele ontwikkeling bij de leerling, al hangt dat ook sterk af van met name de opdrachten en de rol van de leraar. Een volgende globale fasering voor het leerproces lijkt zich aan te dienen: zorg dat formules en uitdrukkingen gedurende lange tijd een concrete betekenis hebben, maar probeer steeds ook of de 'symbol sense' zover ontwikkeld is dat de leerlingen ook los van de context met die formules en uitdrukkingen kunnen manipuleren, en schakel regelmatig bewust elektronische hulpmiddelen in, waarbij vragen als: 'hoe voer ik het in de machine in?', 'waarom geeft de machine het resultaat in deze vorm terug, zou ik dat ook zo hebben gedaan?' tot kritische reflectie moeten leiden. Men denkt soms wel dat met de komst van de computeralgebra er minder tijd aan het algebraonderwijs besteed hoeft te worden. Ik denk dat het tegendeel het geval is, want het gaat niet alleen om een goede begripsvorming, maar ook om nieuwe vaardigheden als het werken met een computeralgebra.
Deze aanbeveling zou ik echter van een andere en een beetje platvloerse vergezeld willen laten gaan: een beetje meer algebraïsch oefenen kan echt geen kwaad, ondanks het afnemen van het aantal studielasturen voor wiskunde in het algemeen.

Relativeringen

Tot slot wil ik enkele relativeringen ten aanzien van de geconstateerde problematiek maken.
De eerste is: als we het in Nederland fout doen, dan zijn we zeker niet de enigen, want je hoort *wereldwijd* over dit soort problemen, en trouwens ook al decennia lang, en internationaal doet Nederland het zo slecht nog niet.
Ten tweede is het succes van een examenopgave een heel gevoelige zaak. Daarbij zijn contexten vaak complicerende factoren, en transfer tussen vakken is al helemaal moeilijk. Het is denkbaar dat dezelfde opgave in iets andere vorm of context gepresenteerd tot een ander (beter?) resultaat leidt.
Ten derde. Het niveau van het eindexamen havo wiskunde A12 is op het gebied van de algebra niet echt hoog (en de kandidaten scoren er niet echt goed op); de vraag is echter hoe erg dat is. Hoeveel algebra hebben deze leerlingen eigenlijk echt nodig? Gaan we (docenten, didactici, examenmakers, lerarenopleiders, leerplanontwikkelaars) soms niet te veel uit van onze eigen algebraïsche expertise, en denken we daarom dat die voor iedereen belangrijk is? Kortom, het gaat om het vinden van de bekende gulden middenweg: nu presteren de leerlingen algebraïsch steeds minder en dreigt het de verkeerde kant op te gaan; terug naar 'vroeger', dat wil zeggen naar ons eigen algebraïsche niveau, is maar voor een selecte groep leerlingen noodzakelijk. In feite is dit natuurlijk een veel algemenere problematiek. In het voortgezet onderwijs gaat het bij wiskunde om minstens drie zaken: wiskunde op zichzelf als fenomeen dat onder andere een rol kan spelen bij het oplossen van allerlei problemen, wiskunde als ondersteunend vak voor andere schoolvakken zoals natuurkunde en economie, en wiskunde als voorbereiding voor een studie in vervolgvakken waar wiskunde een rol speelt en dan vooral natuurlijk in de bètavakken of de technische vakken. En in goed overleg tussen voortgezet onderwijs en hoger onderwijs zal die gulden middenweg mede op basis van de praktijk gevonden moeten worden.

Literatuur

Paul Drijvers: Learning algebra in a computer algebra environment, Design research on the understanding of the concept of parameter. Universiteit Utrecht, 2003.

Over de auteur

Bert Zwaneveld (e-mailadres: bert.zwaneveld@ou.nl) is hoogleraar professionalisering van de leraar, in het bijzonder in het wiskunde- en informaticaonderwijs, aan de Open Universiteit Nederland.

GELIJKVORMIGHEID

Jonge inzichten bij een oud concept (I)

[Wim Pijls]

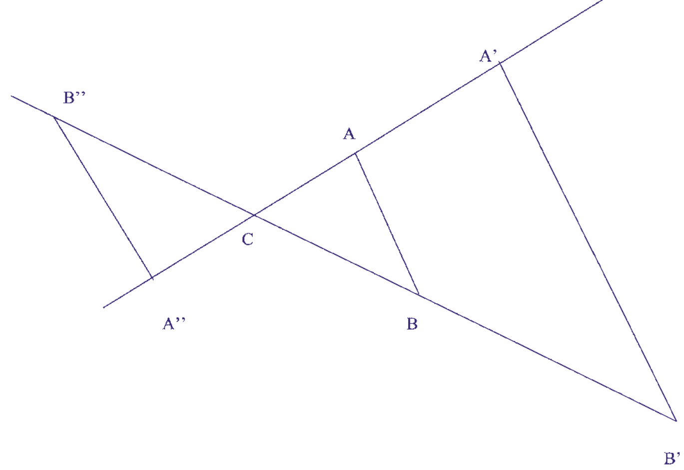
1. Inleiding

De meeste definities en stellingen die in de schoolmeetkunde optreden, waren al in de Griekse Oudheid bekend. Het bekendste wiskundige werk uit die tijd is *De Elementen* van Euclides (300 v.Chr.). Het begrip *gelijkvormig* wordt daar ook al behandeld. Ofschoon het een van de kernbegrippen uit de elementaire meetkunde is, blijkt het toch ingewikkelder te zijn en tot meer problemen aanleiding te geven dan men op het eerste gezicht zou denken. In twee artikelen hopen we aan enkele van deze problemen aandacht te schenken. Paragraaf 2 gaat nader in op de definitie van gelijkvormigheid. Het begrip gelijkvormig door de eeuwen heen komt aan de orde in paragraaf 3. Paragraaf 4 behandelt gelijkvormigheid bij diverse typen figuren. In paragraaf 5 wordt een voorbeeld van zelfgelijkvormigheid gegeven.

2. Definities van gelijkvormigheid

In het boek 'de Elementen' van Euclides staat de volgende definitie (zie de vertaling van Dijksterhuis in [Dijksterhuis]):
Gelijkvormige rechtlijnige figuren zijn zulke die de hoeken een en een gelijk hebben en de zijden om de gelijke hoeken evenredig.
In deze definitie gaat het dus uitdrukkelijk om rechtlijnige figuren. Kunnen ook andere dan rechtlijnige figuren gelijkvormig zijn? Hoe zit het met diverse krommen zoals cirkels, ellipsen en parabolen? Ofschoon ergens anders in de Elementen over gelijkvormigheid van cirkelsegmenten gesproken wordt, komen krommen in relatie tot het begrip gelijkvormig niet aan bod. Gelijkvormig betekent letterlijk 'van gelijke vorm'. Iedereen weet intuïtief wat met de *vorm* van een figuur bedoeld wordt. Toch is dit begrip moeilijk te formaliseren. Een ander intuïtief begrip is *vergroting*, bijvoorbeeld vergroting van een foto. Dit begrip is wel te formaliseren: de ene figuur is een vergroting van de andere indien een 1-1-afbeelding bestaat zodanig dat elke afstand met een vaste factor vergroot wordt. We zien hier tevens, dat het beter is niet over gelijkvormigheid van figuren te spreken, maar over een *gelijkvormigheidsafbeelding* (kortweg GA) van het platte vlak naar het platte vlak. Deze praktijk sluit ook beter aan bij de moderne wiskunde, waarin alle concepten in termen van verzamelingen en afbeeldingen worden gedefinieerd. De definitie van GA die men in de moderne literatuur vaak aantreft is de volgende:
Definitie A.
Een gelijkvormigheidsafbeelding (GA) is een bijectieve afbeelding van het platte vlak naar het platte vlak zodanig dat de afstand tussen elk tweetal punten met een vaste factor k vermenigvuldigd wordt.
In het geval $k = 1$ hebben we een *isometrie* of een congruentieafbeelding (kortweg CA). Congruentie van figuren is door Euclides simplistisch gedefinieerd als 'geheel op elkaar passend'. Meetkundige afbeeldingen willen we het liefst beschrijven in de vorm van concrete bewerkingen of transformaties, zoals spiegelen, draaien, schuiven, etc. Voor de CA's bestaat een elegante karakterisering (zie o.a. [Coxeter]): een congruentieafbeelding is altijd één van de volgende vier transformaties: lijnspiegeling, glijspiegeling, rotatie of translatie. De volgende definitie van gelijkvormigheid is gebaseerd op transformaties:
Definitie B.
Een gelijkvormigheidsafbeelding (GA) is een puntvermenigvuldiging gevolgd door een congruentieafbeelding.
We geven een korte toelichting bij het begrip puntvermenigvuldiging (zie figuur 1). Het punt C is het centrum van de puntvermenigvuldiging. Bij puntvermenigvuldiging met centrum C en een getal k ($k > 0$) gaat een willekeurig punt A over in een punt A' zodanig dat $k\cdot|CA|=|CA'|$. In dat geval liggen A en A' aan dezelfde kant van C. Het is ook mogelijk dat A en het beeld A'' aan weerszijden van C liggen en dus $k\cdot|CA|=|A''C|$. In het laatste geval spreekt men van een negatieve puntvermenigvuldiging.
Dankzij de nieuwe definities zijn we niet meer gebonden aan rechtlijnige figuren, maar kunnen we ook gelijkvormigheid van krommen beschouwen.

In de eerste editie van de overigens uitstekende wiskunde-encyclopedie [Weisstein] treft men de volgende definitie van gelijkvormig aan: 'Twee figuren heten gelijkvormig als alle corresponderende hoeken gelijk zijn.' Afgezien van het feit dat weer niet



FIGUUR 1

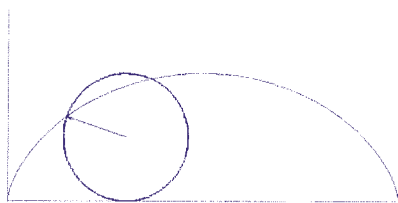
aan kromlijnige figuren gedacht is, bevat deze definitie een andere onjuistheid. Is elk tweetal rechthoeken gelijkvormig? De fout is lang onopgemerkt gebleven, maar is inmiddels na een tip van schrijver dezes in de tweede editie verbeterd. In [Wilson] vindt men een verwante definitie die wèl correct is: 'Een GA is een bijectieve afbeelding van het platte vlak naar het platte vlak die rechten in rechten overvoert en die de grootte van elke hoek invariant laat.' Het is duidelijk dat de zijden van een driehoek onder een GA aldus gedefinieerd dezelfde vergrotingsfactor hebben. Uit twee willekeurige gegeven lijnstukken kan men altijd een vierhoek bouwen, zodanig dat de twee lijnstukken zijden of diagonalen van die vierhoek worden. Omdat de opspannende driehoeken alle met dezelfde factor vergroot worden, worden de zijden van de vierhoek ook met die factor vergroot. Elk tweetal willekeurige lijnstukken heeft dus dezelfde vergrotingsfactor.

Voor CA's hebben we een karakterisering, zoals boven vermeld. Hoe ziet een analoge karakterisering voor GA's eruit? In een vervolgartikel zullen we deze vraag beantwoorden.

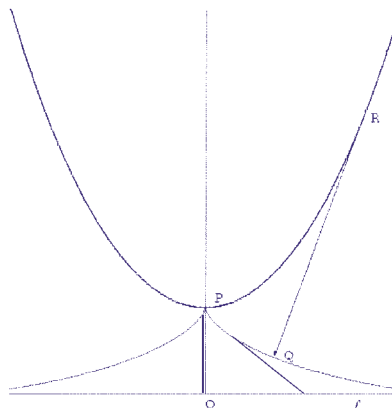
3. Enkele historische opmerkingen

De schoolboeken voor meetkunde van vóór 1968, het jaar van de invoering van de Mammoetwet, leunden sterk op de Elementen van Euclides. We vermeldden reeds dat de definitie van Euclides voor gelijkvormigheid onvolledig is in de zin dat deze slechts rechtlijnige figuren bekijkt. De schoolboeken van vóór 1968 wijken bij de behandeling van het onderwerp gelijkvormigheid dan ook af van Euclides en geven vrijwel alle een definitie die aansluit bij bovenstaande 'definitie B'. Dijksterhuis [Dijksterhuis] merkt over gelijkvormigheid op: '...dit is een van de weinige onderwerpen in de Elementen waarin de hedendaagse meetkunde Euclides verbetert.'
De definitie van Euclides heeft de literatuur tot het begin van de 20ste eeuw gedomineerd. Ik heb enkele bekende 19de eeuwse Nederlandse auteurs van leerboeken, zoals Buys Ballot, Kempees en Versluys, er op nageslagen en zij geven allen de definitie van Euclides en passen derhalve gelijkvormigheid alleen op rechtlijnige figuren toe. Alleen de bekende wiskundige en didacticus Jacob de Gelder [Beckers] heeft een iets ruimere blik. Hij geeft in [Gelder] ook de definitie van Euclides, maar voegt daar aan toe: '...de gelijkvormigheid is eigenlijk die overeenkomst, in de figuur of gedaante van twee uitgebreidheden, welke, ofschoon zij niet even groot zijn, op onze zintuigen nogtans de uitwerking maakt, dat wij, in de eene uitgebreidheid, de figuur of gedaante van de andere herkennen, bestaande derhalve in hetgeen men, door de wandeling, het welgelijken noemt.' Het is opvallend dat de auteur deze uitleg niet kortsluit met het woord vergroting. Volgens [Coxeter] is Clifford (1845-1879) degene die voor het eerst gelijkvormigheid met vergroting in verband brengt. De eerste Nederlandstalige auteurs bij wie ik de puntvermenigvuldiging tegenkwam waren Schuh [Schuh] en Molenbroek [Molenbroek]. Het is mij niet duidelijk wie internationaal verantwoordelijk is voor de introductie van dit begrip. Een vraag dienaangaande in een nieuwsgroep leverde niets op. Felix Klein met zijn Erlanger Programm (1872) heeft het transformatiebegrip als eerste naar voren geschoven. Dit heeft waarschijnlijk het gebruik van verzamelingen en afbeeldingen als fundamentele noties in de wiskunde bevorderd. De puntvermenigvuldiging alsook de andere transformaties (spiegelingen, draaiingen, etc.) zijn waarschijnlijk pas vanaf die tijd in zwang gekomen.

De bijdrage van de befaamde wiskundige Euler (1707-1783) mag niet onvermeld blijven. Zijn bekende analyseboek 'Introductio in Analysin Infinitorum' spreekt over 'similarities of curves' [Euler]. De kenmerkende eigenschap van gelijkvormige krommen is volgens Euler: 'they have the same properties, except for the size'. Hij verwijst overigens in het geheel niet naar Euclides of naar de meetkunde. Volgens de meetkundehistoricus Coolidge [Coolidge] introduceerde Euler het centrum van gelijkvormigheid in 'De centro similitudinis'. Twee cirkels of twee gelijkstandige (zijden twee aan twee evenwijdig) figuren hebben een centrum. Euler legt hier de kiem voor de puntvermenigvuldiging.



FIGUUR 2



FIGUUR 3

4. Criteria voor gelijkvormigheid van diverse figuren

In deze en de volgende paragraaf gaan we diverse typen figuren bekijken in relatie tot gelijkvormigheid. Een belangrijke plaats wordt ingenomen door een aantal bekende krommen zoals ellips, parabool, kettinglijn en spiraal. Krommen worden meestal door formules gedefinieerd. Ze hebben echter vaak interessante meetkundige kenmerken. Wij zullen uitgaan van de meetkundige eigenschappen en formules vermijden. Wie meer details over krommen en hun toepassingen wil weten, wordt verwezen naar de omvangrijke internetsites die er op dat gebied bestaan (zie [Weisstein], [Mactutor] of [Xah]).

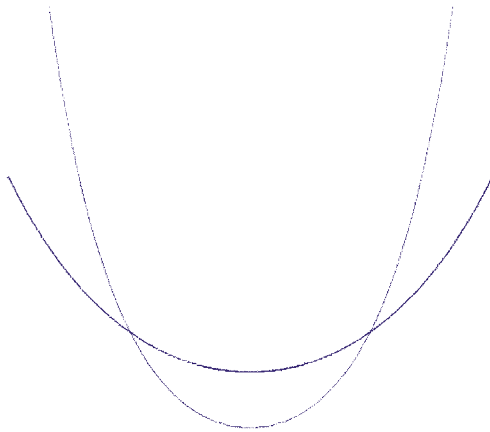
Rechtlijnige figuren. Twee rechtlijnige figuren zijn gelijkvormig indien ze aan de genoemde definitie van Euclides voldoen. Voor de meeste figuren kan men met minder volstaan. Bij driehoeken is het voldoende dat de zijden van twee driehoeken een evenredigheid vormen, of dat twee zijden een evenredigheid vormen met bovendien de ingesloten hoek gelijk. Een ander criterium is: twee van de drie hoeken gelijk. De oudere generatie herkent hier onmiddellijk de afkortingen resp. *zzz*, *zhz* en *hh*.
Een parallellogram kan altijd gezien worden als een driehoek samen met de puntspiegeling (= draaiing om 180°) van die driehoek om het midden van een van de zijden. Hieruit zijn gemakkelijk criteria voor de gelijkvormigheid van parallellogrammen af te leiden. Twee ruiten zijn gelijkvormig als ze één hoek gelijk hebben. Twee rechthoeken zijn gelijkvormig als de verhouding lange/korte zijde bij beide gelijk is. Twee vierkanten zijn derhalve altijd gelijkvormig. Deze laatste uitspraak is weer een bijzonder geval van de stelling dat voor vaste n twee regelmatige n-hoeken gelijkvormig zijn.

Cirkel en Cycloïde. Twee cirkels zijn altijd gelijkvormig. Men kan door een puntvermenigvuldiging de kleinste 'opblazen' tot de andere. Indien een wiel over de grond rolt, beschrijft een vast punt op de omtrek van dit wiel een cycloïde (zie figuur 2). Omdat twee cirkels altijd gelijkvormig zijn, is elk tweetal cycloïdes het ook. Terzijde: de cycloïde speelt in meerdere opzichten een belangrijke rol in de theorie van het slingeruurwerk van Huygens.

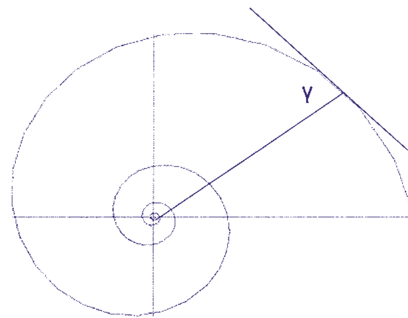
Kegelsnedes. Een kegelsnede met excentriciteit e is de meetkundige plaats van punten zodanig dat de afstand tot een gegeven punt F (het brandpunt) en de afstand tot een gegeven rechte l (de richtlijn) een constante verhouding e heeft. Ingeval $e < 1$, $e = 1$ en $e > 1$ spreken we respectievelijk van een ellips, parabool of hyperbool. Stel dat twee kegelsnedes gegeven zijn, elk met zijn brandpunt en richtlijn. Een GA die de brandpunten en richtlijnen op elkaar afbeeldt, is eenvoudig te vinden. Indien de onderlinge excentriciteiten gelijk zijn, voert deze GA de kegelsnedes in elkaar over. Twee kegelsnedes zijn dus gelijkvormig als hun excentriciteiten gelijk zijn. Twee parabolen zijn dus altijd gelijkvormig. Een parabool is dus altijd een vergroting of verkleining van elke andere parabool! Een alternatief criterium voor ellipsen is: twee ellipsen zijn gelijkvormig als de verhouding tussen de twee hoofdassen dezelfde is.

Tractrix. Als iemand in punt O langs de horizontale lijn l gaat lopen en hij/zij sleept aan een touw met lengte OP een puntmassa mee die zich initieel in P bevindt, dan beschrijft deze massa een tractrix, de onderste kromme in figuur 3. De tractrix is volledig bepaald door de beginpositie OP. Uit het feit dat twee lijnstukken en dus de twee beginposities gelijkvormig zijn, volgt dat elk tweetal tractices gelijkvormig is. Terzijde: de tractrix speelt een rol in de theorie van de Mercator-projectie, onderdeel van de kartografie.

Kettinglijn. De kettinglijn is de kromme die men krijgt als een touw tussen twee punten op gelijke hoogte wordt opgehangen (zie ook [Craats]). Ook hier luidt de boodschap: elke tweetal kettinglijnen is gelijkvormig, ongeacht of de ketting nu strak of slap hangt (zie ook figuur 4). Voor een bewijs kan men gebruik maken van de eigenschap die in figuur 3 geïllustreerd wordt: QR is deel van een touw dat wordt afgewonden van de kettinglijn; eindpunt Q beweegt zich langs een tractrix. Zie genoemde websites voor de details van deze eigenschap. Bij twee kettinglijnen zijn de bijbehorende tractices gelijkvormig en derhalve ook de kettinglijnen zelf.



FIGUUR 4



FIGUUR 5

5. Zelfgelijkvormige figuren

Er zijn figuren die gelijkvormig zijn met zichzelf, dat wil zeggen dat ze bij vergroting in zichzelf overgaan. Dergelijke figuren strekken zich dan natuurlijk wel tot in het oneindige uit. We zullen in deze paragraaf een voorbeeld van een zelfgelijkvormige kromme geven. In [Aarts] worden fractals getoond die zelfgelijkvormig zijn.

In figuur 5 is een logaritmische spiraal[1] te zien, een spiraal die zich windt om de oorsprong. De spiraal is gedefinieerd door de eigenschap dat de hoek tussen de kromme en de voerstraal (= de verbindingslijn tot de oorsprong) een constante waarde γ heeft. De waarde γ kan positief of negatief zijn, afhankelijk van de oriëntatie.
Terzijde: de logaritmische spiraal is de kromme die beschreven wordt als n vliegen op de hoekpunten van een regelmatige n-hoek elkaar achtervolgen. Ook de zogeheten loxodromen op de aardbol houden nauw verband met deze spiraal.
Om bij een gegeven γ de hele spiraal te kunnen reconstrueren, hoef je slechts één punt van de spiraal in handen te hebben. Twee spiralen met gelijke γ zijn op oneindig veel manieren op elkaar af te beelden. Men kiest daartoe op elk van de twee spiralen een punt. Men beeldt de gekozen punten op elkaar af door middel van een draaiing om de oorsprong O gevolgd door een puntvermenigvuldiging vanuit O. Deze afbeelding beeldt dan de beide spiralen in zijn geheel op elkaar af. We zien nu ook dat de twee spiralen met gelijke γ congruent zijn. Als men de twee punten kiest op gelijke afstand van O, blijft bovenstaande afbeelding beperkt tot een draaiing.
De logaritmische spiraal is zelfgelijkvormig omdat hij op oneindig veel manieren op zichzelf is af te beelden. Kies namelijk gewoon twee willekeurige punten op de spiraal en beeld die via de bovenbeschreven transformatie op elkaar af.

Noot

[1] Deze spiraal wordt logaritmisch genoemd omdat hij in poolcoördinaten de formule $r = C \cdot e^{\phi \cot(\gamma)}$ *heeft.*

Literatuur

[Aarts] J.M. Aarts: Meetkunde, facetten van planimetrie en stereometrie. Epsilon uitgaven, 2000.
[Beckers] D. Beckers: Jacob de Gelder (1765-1848) en de didactiek van de wiskunde. In: Euclides 71 (8), pp. 254-262.
[Coolidge] J.L Coolidge: A History of Geometrical Methods. Dover Publications, 1963; herdruk van de uitgave van 1940; p. 65.
[Coxeter] H.S.M. Coxeter: Introduction to Geometry. John Wiley. New York, 1969 (2nd edition).
[Craats] J. van de Craats: Hoe hangt een ketting? In: Nieuwe Wiskrant 19 (1), september 1999, pp. 32-36.
[Dijksterhuis] E.J. Dijksterhuis: De Elementen van Euclides. P. Noordhoff, 1930; deel 2, pp. 87-88.
[Euler] L. Euler: Introduction to Analysis of the Infinite. Hoofdstuk 18, Engelse vertaling uit het Latijn door J.D. Blanton; Springer, 1990.
[Gelder] Jacob de Gelder: Beginselen der Meetkunde. Gebroeders van Cleef, 1817; p. 88.
[Molenbroek] P. Molenbroek: Leerboek der Vlakke Meetkunde. P. Noordhoff, 1926 (6e druk).
[Schuh] F. Schuh: Grepen uit de Moderne Meetkunde, eerste deel. P. Noordhoff, 1916.

[Mactutor] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html - Famous Curves Index
[Weisstein] http://mathworld.wolfram.com/ - MathWorld, een website van Wolfram, opgezet en onderhouden door Eric Weisstein, als boek en CD uitgegeven onder de titel: CRC Concise Excyclopedia of Mathematics, ISBN 0-8493-1945-5, 2002.
[Wilson] www.maths.gla.ac.uk/~wws/cabripages/klein/similarity.html - Wilson Stothers' Geometry Pages
[Xah] http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html - Xah Visual Dictionary of Famous Plane Curves

Over de auteur

Wim Pijls (e-mailadres: pijls@few.eur.nl) werkte van 1973 tot 1984 als docent wiskunde en informatica aan de Lerarenopleiding Zuidwest-Nederland, thans Hogeschool Rotterdam. Sinds 1984 is hij docent informatica aan de Erasmus-Universiteit.

VAN EXPERIMENTEREN NAAR IMPLEMENTEREN, DEEL 1

Ontwikkelingen van ICT in het wiskundeonderwijs

[Martin van Reeuwijk en Peter van Wijk]

Overzicht vooraf - drie delen

Dit artikel, in drie delen, gaat over de ontwikkelingen van ICT in het wiskundeonderwijs. Het eerste deel gaat over hoe ICT zich de afgelopen 15 jaar binnen het wiskundeonderwijs ontwikkeld heeft, het tweede deel maakt de balans op van wat alle inspanningen en projecten uiteindelijk opgeleverd hebben, en in het laatste deel staan implementatie, didactische aspecten van ICT en de toekomst centraal.

Inleiding

De ontwikkeling van ICT in het wiskundeonderwijs, een groot aantal jaren geleden begonnen met losse experimenten, is nu in de fase waarin daadwerkelijke implementatie van ICT in het onderwijs een centraal thema is. In dit artikel schetsen we aan de hand van een aantal voorbeelden wat er de afgelopen 15 jaren volgens ons gebeurd is en welke ontwikkelingslijnen er te ontdekken zijn. Dit artikel is bedoeld voor mensen die net als wij geïnteresseerd zijn in wiskunde en ICT en benieuwd zijn naar de ontwikkelingen die op dit gebied hebben plaats gevonden. We geven geen uitputtend historisch overzicht, maar zetten – naar ons idee – belangrijke ontwikkelingen rondom ICT in het wiskundeonderwijs op een rijtje: grafische rekenmachine, (niet-educatieve en educatieve) software, internet (waaronder het www en applets). Ook aan diverse projecten rond het gebruik van ICT besteden we aandacht: ontwikkelprojecten, nascholingsprojecten, implementatieprojecten. We concentreren ons in dit artikel op het wiskundeonderwijs, maar ook in andere vakken wordt er volop geëxperimenteerd en gewerkt met de computer. Het vak informatica is ontwikkeld en heeft veel inzichten en materialen op geleverd die ook voor het wiskundeonderwijs van nut zijn geweest.

Vier fasen

Brinkhorst (2002) onderscheidt vier fasen die worden doorlopen bij het vernieuwen van onderwijs. We hanteren deze indeling als historische leidraad om de ICT-ontwikkelingen in het Nederlandse wiskundeonderwijs de afgelopen 16 jaar (vanaf 1988) op een rijtje te zetten.

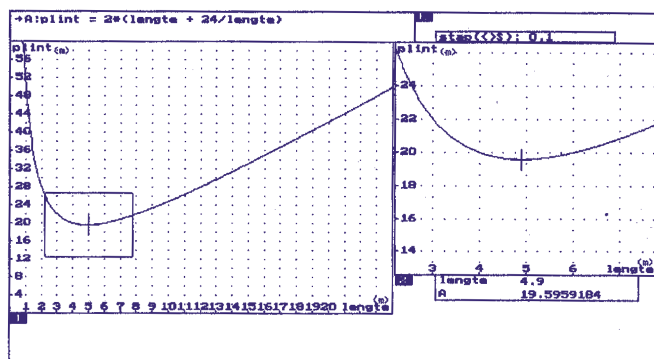
Op de kar springen (1988-1993)

Vragen die in het begin spelen gaan vooral over het meedoen met informatietechnologie (afgekort tot IT). Het gaat om de aanschaf van computers, software en de financiën die daarvoor nodig zijn. Het is de tijd van NIVO[1] waarin voor het eerst op grote schaal PC's worden verspreid, en PRINT[2] waarin de nadruk op de ontwikkeling van software ligt.
Er zijn enthousiaste initiatiefnemers, maar ze hebben moeite steun bij de rest van de school te vinden. Bij het management van de scholen is men vaak niet voldoende op de hoogte van de mogelijkheden van IT.

De grote verwarring (1993-1998)

Grote hoeveelheden software komen op de scholen af. De techniek eist veel aandacht op, zowel het werkend krijgen (en houden) van de hardware als het werkend krijgen van de software. Er is nog weinig sprake van standaarden, waardoor de hardware in combinatie met de software lang niet altijd functioneert. Er zijn veel onduidelijkheden over wie waarvoor verantwoordelijk is, frustraties over softwarepakketten die niet goed werken en veel teleurstellingen over de techniek die hapert. Veel software is niet uitdagend en traag in het gebruik.
De initiatiefnemers en directie kunnen de rest van de school niet voldoende structuur, overzicht en sturing

een DOS-versie





FIGUUR 2 De TI-81, een eenvoudige grafische

bieden. De voorlopers raken overbelast. IT wordt ICT, maar staat nog los van het leerproces. Computers worden vooral gebruikt als afwisseling van de reguliere klassikale lessen. Er zijn nog weinig inhoudelijke en onderwijskundige argumenten voor het gebruik van ICT in het onderwijs.
In deze periode worden diverse PIT-projecten[3] uitgevoerd waarin de nascholing van docenten centraal staat. De aandacht verschuift van ontwikkeling van software naar het maken van werkbladen en het verzorgen van nascholing.

Werken volgens plan (1998-2003)

Er wordt getracht structuur aan te brengen in verantwoordelijkheden, techniek, financiën en de onderwijskundige keuzes rond het gebruik van ICT. Er moeten keuzes gemaakt worden over inhoudelijke en onderwijskundige implicaties van het gebruik van ICT. Een van de vragen gaat over de keus tussen computer-lokalen en/of in elk lokaal enkele computers. Een andere gaat over de rol van ICT in het onderwijs: is ICT een middel of een doel? Ook over de taakverdeling binnen school moeten standpunten worden bepaald: wie doet wat, wat is de taak van de systeembeheerder, wat is de rol van de docent? Een goede samenwerking, taakverdeling en communicatie maakt een succesvolle aanpak mogelijk. Er komt behoefte aan mensen die samenhang zien en structuren kunnen aanbrengen. Het WorldWideWeb wordt gemeengoed en Kennisnet wordt gelanceerd.

Volledige integratie (2003-...)

Werkend vanuit een ICT-beleidsplan op schoolniveau en een duidelijke visie worden keuzes gemaakt. De discussie gaat niet meer over wel-of-niet maar over de manier waarop ICT leren kan ondersteunen, ICT als natuurlijk hulpmiddel. Er is behoefte aan creatieve didactici die vanuit een duidelijke visie ICT in het leren kunnen integreren.
Er is een verschuiving in het gebruik van ICT, van *learn to use* naar *use to learn*.

Deze vier fasen werken we hieronder uit voor het wiskundeonderwijs.

1988-1993

Er zijn onder wiskundedocenten aardig wat enthousiastelingen die in vrije uurtjes leuke computer-programmaatjes weten te maken. Het zijn meestal programma's voor eigen gebruik en om aan elkaar te kunnen laten zien. Er is grote interesse voor de techniek en het programmeren. De eerste kleine experimenten met leerlingen vinden plaats. Computers zijn vooral 'leuk', en het is vanzelf-sprekend dat ze in het onderwijs ingezet moeten worden. Onder andere in het NIVO-project wordt geëxperimenteerd om uit te zoeken wat de educatieve meerwaarde van computers zou kunnen zijn. Met eerste versies van de VU-software kunnen leerlingen eenvoudig grafieken tekenen en simulaties uitvoeren (zie figuur 1). Omdat de computer een deel van het

reken- en tekenwerk uit handen neemt, worden leerlingen meer uitgedaagd na te denken over waar ze mee bezig zijn. De software wordt vooral naast en niet in plaats van het boek gebruikt. Het gaat de wiskundedocenten om de vraag, hoe software ingezet kan worden bij het leren van wiskunde, maar de scholen gaat het in deze periode vooral om de apparatuur, om computers en een netwerk op de school geïnstalleerd te krijgen.
Het is vaak nog een hele klus om de programmaatjes op de computers op school draaiend te krijgen. De didactische vorm waarin met computers gewerkt wordt is die van 'de klassikale computerles', een les in het computerlokaal die in veel opzichten een gewone practicumles benadert. Alles binnen de context van de school. De energie en aandacht van de docent gaat vooral op aan het bespreken van het computerlokaal, de leerlingen in een andere opstelling zetten, hulp bieden bij technische problemen. Er is nauwelijks ruimte voor wiskundig-inhoudelijke en IT-specifieke didactiek en vaardigheden. De tijd gaat op aan het 'learn to use'.

De WIT-conferentie - de eerste echte stappen

In 1989 wordt een conferentie georganiseerd speciaal over Wiskundeonderwijs en IT (Informatie Technologie): de WIT-conferentie. In congrescentrum De Leeuwenhorst in Noordwijkerhout verzamelen zich meer dan honderd docenten, didactici, onderzoekers, ontwikkelaars en programmeurs om elkaar te laten zien wat er is, met elkaar te praten over wat er allemaal zou kunnen en om van elkaar te leren. Doel van de conferentie is een 'stand-van-zaken' te presenteren om zicht te krijgen op de bijdrage die informatietechnologie kan leveren aan de verbetering van het wiskundeonderwijs (Bakx, 1990).
Kenmerkend aan de WIT-conferentie is dat er nog geen sprake is van Communicatie. Het gaat om IT. Internet is nog niet algemeen toegankelijk, het WorldWideWeb bestaat nog niet, e-mailen doen nog maar enkelen.
In een aantal interessante werkgroepen komen verschillende soorten IT aan de orde. Het gaat niet alleen om computers en programma's voor gebruik in de les. Zo wordt er een oefenprogramma gepresenteerd waarmee studenten thuis regels en algoritmes kunnen oefenen en kan men kennismaken met de programmeertaal *ALCOR* die in het W12-16[4] project ontwikkeld is.
Een van de prikkelende stellingen die wordt gepresenteerd tijdens de afsluitende paneldiscussie op de WIT-conferentie luidt: 'De invoering van computerprogramma's als *Derive* (...) zal tot gevolg hebben dat wiskunde als schoolvak wordt afgeschaft.' Niemand is daar in 1989 echter bang voor.

Op de WIT-conferentie wordt voor het eerst een werkgroep gegeven over de grafische rekenmachine, de HP28S. Een primitief apparaat, maar je kan er grafieken mee tekenen. In november 1989 komt de TI-81, de eerste grafische rekenmachine van Texas Instruments, in een blauw doosje naar Nederland (zie figuur 2).

ICT, projecten en producten

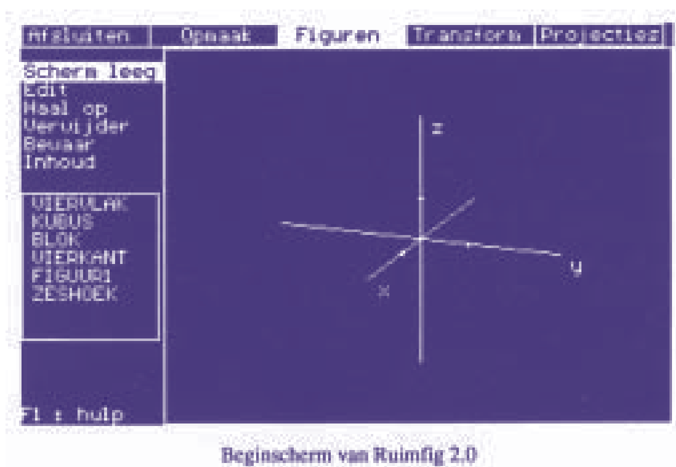
Als onderdeel van NIVO wordt er voor wiskunde onder andere nascholingsmateriaal ontwikkeld, resulterend in een mooie map werkbladen met de naam WisCom (Schoemaker e.a. 1987). Met PRINT-gelden worden diverse programma's speciaal voor het wiskundeonderwijs ontwikkeld. Bij het Freudenthal Instituut (toen nog OW&OC) gebeurt dat onder de naam COWO[5]; enkele producten uit die tijd zijn: *RuimFig* (een voorloper van *Doorzien*; zie figuur 3), *BergDal*, *LinProg* en *Alex*.
Ook door anderen wordt de nodige DOS-software ontwikkeld. Een aantal bedrijven begint software te ontwikkelen voor het wiskundeonderwijs. NIB-software komt met programma's over spiegelen, transleren, puntvermenigvuldigen en roteren. Veelgebruikte programma's zijn *Schatten*, *Zakgeld*, *Klasseavond*, *Heks* en *Supermarkt*. NICOO-software brengt twee diskettes uit met heel bruikbare programma's voor de brugklas rondom rekenen, algebra en meetkunde. Visiria komt onder andere met *Matrix*, *Ruimtemeetkunde deel 1*, *Goed gezien: gonio*, *Supergraph*, *Draad*, *Knobbel Senior*, *Fractals* en *Rekentrainer*, Macco met *Hoeken*, *Coord*, *Cirkel*, *Wiskunde Pakket 1 voor de brugklas* en *Gonio*. Daarnaast beginnen ook uitgeverijen software op de markt te brengen. De Wageningse Methode komt met een aantal diskettes met als titels *Basisvorming*, *Toegepaste Algebra*, *Fundamenten Algebra* en *Kansrekening*. Deze programma's kunnen onafhankelijk van de Wageningse Methode gebruikt worden. Verder komt Wolters-Noordhoff met *Datastat* (voorheen *Sorbet*), *VU-kort*, *VU-losop*, en *VU-grafiek*, Educatieve Partners Nederland (EPN) met *Dynamische Simulaties*, *Functies en Grafieken*, *Statistiek*, *Ruimfig* en later ook *Xamen*.

1993-1998

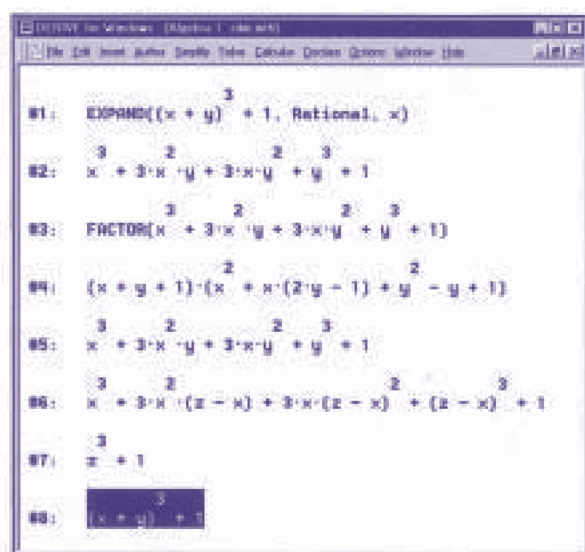
In deze periode gebeurt van alles. Zoals echter door Bronkhorst geschetst, is er sprake van verwarring. Er is veel software. Iedereen wil iets doen, maar er zijn nog geen structuren.
In het kader van PIT ontstaat een samenwerkingsverband tussen APS, PRINT en het Freudenthal Instituut. Ook al zijn de PIT-gelden bedoeld voor nascholing, er wordt op diverse plaatsen toch doorontwikkeld (Doorman en Verhage 1995). Er worden door een groot aantal docenten werkbladen gemaakt en uitgeprobeerd rondom:
- Grafieken: *VU-grafiek,*
- Meetkunde: *Alcor*, *Doorzien*, *ECC-ruimtemeetkunde*, *Geometrucs*,
- GWA (Geïntegreerde Wiskundige Activiteiten): *Reisplanner*,
- Statistiek: *VU-stat*,
- Spreadsheets: *WP Works Junior*, *Koppie-koppie*.

De Wiskie-programma's zoals *Bollen schieten*, *Weetjesquiz*, *Grafieken* en *Getallenfabriek* vinden hun oorsprong in het PIT-tijdperk. Ook rond de wiskundesoftware van Visiria en Macco ontstaan allerlei werkbladen. Bijzonder populair in die tijd is het programma *Hoeken,* een spel voor twee personen waarbij de grootte van een hoek geschat moet worden. De kracht van dit

een DOS- versie



Beginscherm van Ruimfig 2.0



FIGUUR 4 Een voorbeeld van symbolische algebra,

programma zit in de eenvoud en het spelelement.
Vanaf 1997 worden de eindexamens wiskunde voor vbo/mavo afgenomen volgens de nieuwe examenprogramma's. Een nieuw, verplicht onderdeel hierbij is het 'functioneel gebruik van de computer bij het schoolonderzoek'. Dit soort maatregelen van bovenaf hebben direct gevolg voor het gebruik van de computer. Je móet nu wel als docent.

Van gesloten naar open programma's

De ontwikkeling van IT voor het onderwijs gaat van een rigide omgeving waarin nauwelijks ruimte is voor eigen inbreng naar een open omgeving waarin de gebruiker het voor het zeggen heeft.
In het begin van het gebruik van de computer in het onderwijs (vanaf de jaren '80) is er vooral sprake van Computer Gestuurd Onderwijs (CGO), waarbij de computer met name wordt ingezet bij het oefenen en toetsen. De CGO-programma's zijn vaak lineaire reeksen vragen waarbij uit een rijtje het juiste antwoord gekozen moet worden (multiple choice) of waarbij een eenvoudig antwoord ingetoetst moet worden. Sommige van dit soort programma's leveren uitgebreide feedback, maar het blijven toch boeken op het scherm, statisch en lineair. Het gebruik van de computer heeft wel meerwaarde omdat snel een score van het aantal goed/fout berekend kan worden.
In de loop van de tijd komen naast de gesloten programma's meer open programma's zoals *VU-grafiek* en *Doorzien* beschikbaar. Kenmerkend voor dit soort programma's is de open omgeving met gereedschap waarin de gebruiker bepaalt wat er gebeurt. De programma's kunnen op verschillende manieren worden ingezet:
- Als didactisch hulpmiddel bij het verkennen van nieuwe wiskundige problemen, kennis en begrippen. De software ondersteunt dankzij de dynamiek, interactiviteit en visualisatie.
- Bij het oefenen van bepaalde vaardigheden. De software kan hierbij ook feedback geven aan de leerling en de leerling kan op zijn eigen niveau bezig zijn.
- Als tool, software als gereedschap om een probleem op te lossen. Complexe wiskundeproblemen komen met behulp van deze software wel binnen het bereik; denk hierbij aan ingewikkelde formules, doorsneden en bouwplaten van ruimtelijke figuren.

Door de technische ontwikkeling van de hardware en de toegenomen snelheid van de computers worden de programma's steeds aantrekkelijker, dynamischer en visueler. Bij deze programma's hoort begeleidend lesmateriaal met opdrachten, vaak in de vorm van werkbladen. Dit in tegenstelling tot de CGO-programma's waarin alles via het scherm verloopt.
Naast de speciaal voor het Nederlands wiskundeonderwijs ontwikkelde programma's wordt ook andere software gebruikt. Een veel gebruikt spreadsheetprogramma is *Excel*. Daarnaast doet het symbolische algebra pakket *Derive* ook in Nederland zijn intrede - eerst heel voorzichtig in het hoger onderwijs, maar later ook in de tweede fase (zie figuur 4). Ook het

wiskundig ontwerpprogramma *MathCad* vindt zijn weg via het hoger onderwijs.

Van IT naar ICT

In 1991 wordt het WorldWideWeb geïntroduceerd en dankzij de universele taal HTML wordt in de jaren '90 het internet voor een hele grote groep mensen toegankelijk. Het verspreiden van informatie en het communiceren via internet worden stukken eenvoudiger, sneller en flitsender. IT wordt ICT en de computer wordt net zo gewoon als de tv. Dankzij de communicatiemogelijkheden wordt ICT voor veel mensen leuk. De aantrekkelijke en eigentijdse vormgeving zorgt er bovendien voor dat surfen, downloaden en e-mailen heel eenvoudig worden.

1998-2003

In deze fase wordt het gebruik van de computer enorm populair. Vooral leerlingen slaan massaal aan het surfen, chatten en downloaden. Daarnaast wordt het internet massaal benut om informatie in te winnen voor praktische opdrachten en profielwerkstukken. Door de toename van de snelheid van internet (en de computers) hoef je niet meer eindeloos te wachten tot informatie is gedownload[6].
Op de scholen raakt de techniek, hardware en infrastructuur langzaam op orde. De overgang van DOS naar Windows maakt de software een stuk gebruikersvriendelijker en het ziet er gelijk mooier uit. Computers kunnen steeds meer en worden alsmaar sneller en geheugen kost steeds minder.
Iedereen raakt op zijn eigen manier vertrouwd met het *Microsoft Office* pakket[7]. Veel docenten hebben kennis gemaakt met tekstverwerken via *WordStar* en *WordPerfect* en met *Lotus 1-2-3* als spreadsheet, maar nu wordt stilletjes aangenomen dat iedereen kan tekstverwerken met *MS-Word*. De populariteit van het spreadsheet *Excel* biedt veel kansen voor het wiskundeonderwijs. Van docenten wordt verwacht dat ze een digitaal rijbewijs halen en daarmee over basiskennis en -vaardigheden in het werken met Windows en de Office-programmatuur beschikken.

De computer wordt gewoon

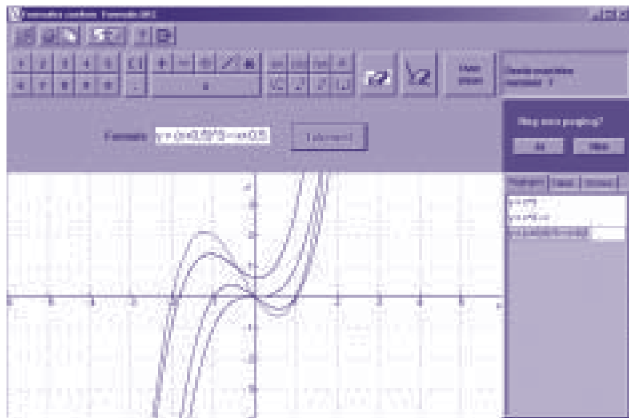
Van de toegenomen computervaardigheid van de docenten is in het begin niet altijd direct wat te merken in de les. De computer wordt vooral buiten de les en voor privé-doeleinden gebruikt. Docenten gebruiken de computer bij het voorbereiden van hun lessen, bij het maken van toetsen en praktische opdrachten en als administratief hulpmiddel om onder andere cijfers bij te houden. Voor dat type activiteiten is de computer standaard geworden. Ondertussen groeit de huidige generatie leerlingen op met de computer. Voor hen is het een niet meer weg te denken apparaat, dat dus door hen ook voor het onderwijs wordt ingezet als daar door het onderwijs niet om gevraagd wordt (als communicatiemiddel, als informatiebron, als rekenhulp, ...).
Tot aan de opkomst van het WorldWideWeb blijft het gebruik van de computer vooral gericht op het gebruik van grote softwarepakketten en kleinere oefenprogramma's. De intrede van de grafische rekenmachine is daarnaast een andere krachtig ICT-middel dat met name in de exacte vakken opgang vindt. De uitgevers van de methoden zijn voorzichtig met het integreren van ICT. Het wordt gezien als iets extra's. In de boeken staat aan het eind van een hoofdstuk een ICT-opdracht. Het is niet duidelijk hoe ICT echt geïntegreerd kan worden in de dagelijkse onderwijspraktijk en de methoden.

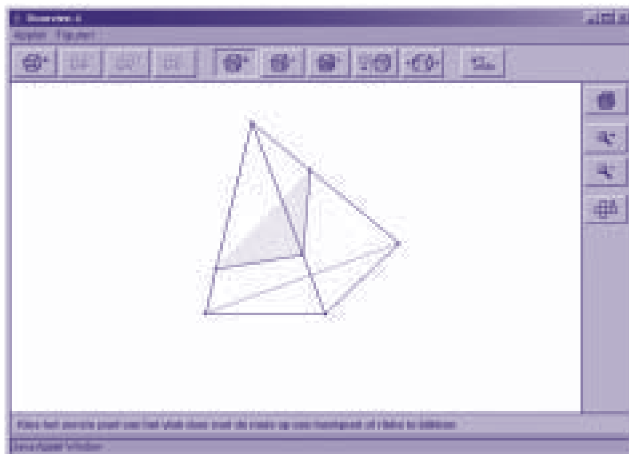
Stimuleren van verdere ontwikkeling

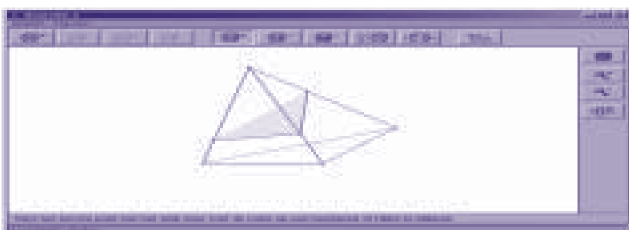
Nederland heeft een kleine markt, en dat maakt de ontwikkeling van ICT duur. Bovendien zijn keiharde gegevens over de meerwaarde van ICT voor het (wiskunde)onderwijs nog maar mondjesmaat voor handen. Op de website van de Stichting *ICT op School* (*www.ictopschool.net*) staat een uitgebreid overzicht van onderzoeken naar ICT en onderwijs, maar deze zijn vaak van algemene aard en tonen niet overtuigend de meerwaarde aan. Dat verklaart wellicht de aarzelende houding van de commerciële markt om in educatieve software te investeren. Wel is aangetoond dat leerlingen beter presteren wanneer de computer regelmatig wordt ingezet.
In 2000 start het ministerie van OC&W een nieuwe ronde ICT-projecten. Scholen en andere onderwijsinstellingen kunnen een projectvoorstel indienen voor een ICT-netwerk- of een ICT-ontwikkelproject. Later komt daar nog een ICT-implementatieproject bij. Dit zijn relatief kleine projecten waarin de verschillende aspecten van ICT aan de orde komen. Voorbeelden zijn WisBase[8] (een digitale toetsenbank, een netwerkproject); WisWeb, Wisbaak[9] en ADLO[10] (ontwikkelprojecten); en WELP[11], een ICT-implementatieproject.

Software en internet

Met de opkomst van het internet wordt bestaande programmatuur aangepast, zodat die ook via het internet kan worden aangeboden. Er wordt ook nieuwe software ontwikkeld die gebruik maakt van de kracht van het internet; de snelheid en de gebruikersvriendelijkheid en de visuele manier van informatie presenteren via het www. Een populaire vorm van de nieuwe software is het applet, een klein programmaatje dat via het internet draait. Net als de eerder ontwikkelde software komen ook applets in verschillende soorten en maten voor.
- Er zijn applets die rond een wiskundig model zijn ontwikkeld. Ze ondersteunen de ontwikkeling van wiskundig inzicht en begrip. De kracht van het applet zit hem in de dynamiek en de visuele representatie en bovendien doet het applet het rekenwerk en tekenwerk waardoor leerlingen zich kunnen concentreren op wiskundige begrippen en modellen. Voorbeelden van dit type applets zijn *Algebra Pijlen* en *Huisjes bouwen* op het WisWeb.
- Daarnaast zijn er applets die beperkt en gesloten zijn en zich richten op één (of enkele) vaardigheden. Dit is vaak oefensoftware. Het applet sluit aan bij een wiskundeonderwerp en geeft directe feedback. Denk bijvoorbeeld aan het eerder genoemde supereenvoudige







FIGUUR 7 De laatste versie van Doorzien

maar reuze populaire programma *Hoeken*[12], de *Wiskie-programma's*[13] en de vele applets op bijvoorbeeld WisWeb[14] en RekenWeb[15], zoals *Schatten*. Er is een enorme behoefte aan het type oefensoftware waarmee het mogelijk is leerlingen (extra en op eigen niveau) te laten oefenen en de programmaatjes zijn ook voor toetsdoeleinden te gebruiken.

- Een derde manier van het gebruik van applets – en software in het algemeen – is als gereedschap, ook wel tool genoemd. Het applet wordt dan – net als bijvoorbeeld een (grafische) rekenmachine – gebruikt als gereedschap bij het oplossen van een wiskundig probleem. Een voorbeeld hiervan is het applet *Grafieken Tekenen* waarmee leerlingen snel en eenvoudig een grafiek bij een formule (functie) kunnen tekenen.

Veel van de model-applets kunnen ook als tool worden ingezet, zoals een grafische rekenmachine ook kan worden ingezet bij het ontwikkelen van wiskundige begrippen. Andere voorbeelden van tool-software zijn *Excel* en *VU-grafiek*.

Applets zijn populair en dat is te begrijpen want ze zijn veelal klein, eenvoudig en snel te gebruiken zonder dat een handleiding of introductieles nodig is. Vaak beperken ze zich tot enkele wiskundige begrippen of vaardigheden en worden leerlingen niet lastig gevallen met allerlei opties en mogelijkheden die niet nodig zijn. Applets kunnen leerlingen motiveren, zeker als ze ook nog eens aantrekkelijk en 'leuk' zijn. Door de dynamiek en de visuele representatie zijn wiskundige modellen eenvoudig op verschillende manieren te representeren en te bestuderen. En applets zijn op meerdere manieren in te zetten: als demonstratie, als oefening, als verkenning, als toets. Bovendien zijn applets (en internetsoftware in het algemeen) overal waar een internetverbinding is (school, thuis) te gebruiken.

Maar het is de vraag of applets niet een trend vormen die weer overwaait. Is het meer dan leuk? Bovendien vraagt het gebruik van applets in de les van de docenten een andersoortige voorbereiding en uitvoering van de les. Is men daartoe bereid? Tenslotte vraagt ook de techniek om onderhoud. Nieuwe applets vragen nieuwe en snellere systemen. Scholen zijn nu allemaal aangesloten op het internet, maar scholen beschikken vaak niet over de nieuwste en snelste computers en verbindingen.

De introductie van Kennisnet en de doelstelling van het ministerie om binnen enkele jaren alle scholen op het internet aan te sluiten, wordt in 2003 gehaald. De verschillende rondes van subsidies, PRINT, ICT-ontwikkelprojecten, netwerkprojecten en implementatie-projecten die de overheid beschikbaar stelt, maken het mogelijk dat initiatieven uit de hobby- naar de professionele sfeer worden getrokken. Deze stimulerende maatregelen dragen er toe bij dat ICT een plek krijgt binnen het onderwijs. Langzaam wordt aan steeds meer (technische) randvoorwaarden voldaan om

ICT in het onderwijs te kunnen gebruiken en komt er steeds meer bruikbare software beschikbaar. Er vindt een verschuiving plaats van *learn to use* naar *use to learn*.

2003-...

Uitgevers kunnen nu niet meer om ICT heen. Er wordt geïnvesteerd in het aantrekkelijk, leuk en mooi maken van de software. Grote programma's worden weer opgesplitst in kleine aantrekkelijke programmaatjes; er is behoefte aan kleine doelgerichte programma's, die bij een hoofdstuk uit het boek aansluiten.
De uitgevers hebben inmiddels allemaal een website bij de methode. Deze methodesites zijn nog openbaar, maar de vraag is of in de toekomst deze beveiligd en afgesloten worden waardoor alleen gebruikers van de methoden nog toegang hebben. Naast de methodesites wordt bij de methoden veelal een cd-rom meegeleverd waarop alle software staat die in de methode wordt gebruikt. Er is bewust gekozen om onafhankelijk te zijn van internet. In de nieuwe edities van de methoden (vanaf 2003) zijn applets en andere software een vast onderdeel. Een aantal van deze applets is ontwikkeld binnen het WisWeb-project.

Naast de programma's en applets die vaak speciaal voor het wiskundeonderwijs zijn ontwikkeld, komt er in het onderwijs steeds meer belangstelling voor opdrachten waarin ICT volledig geïntegreerd is. Een voorbeeld hiervan zijn *WebQuests*. Een *WebQuest* is een onderzoeksgerichte opdracht waarbij informatie, in ieder geval voor een deel, afkomstig is van internet-bronnen. Een *WebQuest* gaat verder dan het zoeken van een antwoord op een vraag. Leerlingen gaan met een vraag aan de slag die hun denken op een hoger plan brengt. De structuur van een *WebQuest* bevat als onderdelen: inleiding, opdracht, werkwijze, bronnen, beoordeling en reflectie[16].

Met dit voorbeeld van nieuwe opdrachten in het wiskundeonderwijs waarbij ICT een duidelijke rol speelt, eindigen we dit eerste deel. We hebben een overzicht gegeven van de ontwikkelingen van ICT in het wiskundeonderwijs zoals wij die hebben gezien en meegemaakt. Het is een subjectieve selectie van een historisch overzicht, en biedt voor velen diverse herkenningspunten.

Noten

---

[1] NIVO staat voor Nieuwe Informatietechnologie in het Voortgezet Onderwijs.
[2] PRINT is een vervolg op NIVO en staat voor Project Nieuwe Technologie.
[3] PIT (Project Informatie Technologie) waarin nascholing centraal staat.
[4] Het W-12-16 project was een wiskundeonderwijsvernieuwings-project voor leerlingen van 12 tot 16 jaar oud. Dit project liep parallel aan de invoering van de basisvorming.
[5] COWO staat voor Computer Ondersteuning Wiskunde Onderwijs.
[6] ACHMEA maakte een treffend reclamefilmpje over het wachten tijdens downloaden; je kunt ondertussen allerlei leuke cursussen volgen...
[7] Microsoft Office bestaat uit Word, Powerpoint, Excel en Outlook.
[8] WisBase is een Zeeuws initiatief; zie de website www.wisbase.nl.
[9] WisBaak is een project waarin software is ontwikkeld ter ondersteuning van leerlingen die zwak presteren bij wiskunde in de basisvorming, liep van 2001-2003; zie ook www.fi.uu.nl/wisbaak.
[10] ADLO staat voor 'Algebraonderzoek in een Digitale LeerOmgeving' en liep van 2000-2002; zie www.fi.uu.nl/adlo.
[11] Het WELP-project is een ICT implementatieproject waarbinnen kennis, ervaring en producten uit het WisWeb project worden geïmplementeerd op bredere schaal. Het gaat met name om algebra in de klassen 2 en 3, zie de WisWeb-site voor meer info (www.wisweb.nl).
[12] Er staat een hoek op het scherm (twee lijnstukken) en de leerling moet (zo snel mogelijk) intypen hoe groot de hoek is.
[13] De Wiskie-programma's zijn klein en eenvoudig in gebruik met een duidelijk doel. De Wiskie-programma's zijn aan een volgend leven begonnen in de vorm van applets.
[14] WisWeb is onder andere de naam van een ICT-ontwikkelings-project, zie de website www.wisweb.nl
[15] RekenWeb is de website voor rekenen in het basisonderwijs (www.rekenweb.nl).
[16] Op de site www.webkwestie.nl zijn bij wiskunde een aantal WebQuests te vinden.

Referenties

Zie voor referenties de NVvW-website: www.nvvw.nl/euc802ref.html
Op de betreffende pagina zijn ook de adressen van de in dit artikel genoemde websites vermeld.

Over de auteurs

Peter van Wijk (e-mailadres: p.vanwijk@aps.nl) is wiskundedocent aan College de Klop in Utrecht. Hij is daarnaast werkzaam bij het APS als pedagogisch-didactisch medewerker rondom wiskunde en ict&leren.
Martin van Reeuwijk (e-mailadres: M.vanreeuwijk@fi.uu.nl) werkt bij het Freudenthal Instituut. Zijn interesses liggen op het gebied van de algebra, toetsen en technologie. Hij was onder andere projectleider van de ICT-projecten WisWeb en WELP.
Beiden zijn de initiatiefnemers van de ICT-conferentie voor het wiskundeonderwijs die inmiddels vier keer heeft plaatsgevonden.

80ste jaargang

[Rob Bosch]

Het getal 80 kunnen we op een groot aantal manieren schrijven als de som van positieve gehele getallen. Een dergelijke schrijfwijze noemen we een *partitie* van het getal 80. Zo zijn 80 = 40 + 40 en 80 = 1 + 1 + 2 + 6 + 70 partities van 80 in respectievelijk 2 en 5 delen. Onder het *product van een partitie* verstaan we het product van de delen van de partitie. De producten van genoemde partities zijn dus 40 × 40 = 1600 en 1 × 1 × 2 × 6 × 70 = 840. De eerste partitie heeft een aanzienlijk groter product dan de tweede. De vraag aan de lezer: voor welke partitie of partities is het product maximaal?

Als we de beide delen van de partitie 80 = 40 + 40 in twee gelijk delen splitsen, dan krijgen we
80 = 20 + 20 + 20 + 20
met een product van 160.000. Nogmaals splitsen geeft
80 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10
met product 10^8.
Het lijkt erop dat de partitie $80=\underbrace{2+2+2+...+2}_{40}$ het maximale product heeft,
te weten 2^{40} = 1.099.511.627.776.
Is dit inderdaad het grootste product dat mogelijk is?

In een partitie met maximaal product komt het getal 1 uiteraard niet voor. Getallen groter dan 4 kunnen we splitsen in twee delen met een product dat groter is dan het getal zelf. Bijvoorbeeld 5 = 2 + 3 met 2 × 3 = 6 en 10 = 2 + 8 met 2 × 8 = 16. Dus getallen groter dan 4 komen in de gevraagde partitie evenmin voor. Een 4 kunnen we schrijven als 2 + 2 zonder dat het product van de partitie verandert. We kunnen dus aannemen dat in een partitie met maximaal product alleen de getallen 2 en 3 voorkomen.
Omdat $\underbrace{2+2+2}_{3}=6$ een product geeft van 8, en $\underbrace{3+3}_{2}=6$ een product geeft van 9, kunnen we een product vergroten door in een partitie ieder drietal tweetjes te vervangen door twee drietjes.
Een maximale partitie bevat dus zoveel mogelijk drietjes eventueel aan gevuld met één of twee tweetjes.
Voor de partitie van 80 betekent dit
$80=\underbrace{3+3+3+\quad+3}_{26}+2$

Het bijbehorende product is $3^{26}\cdot 2=5.083.731.656.658$.
In de eerste aflevering van deze rubriek (zie [1], p. 033) vonden we:

Als de som van n positieve variabelen constant is, bijv. $x_1+x_2+\ldots+x_n=80$, dan is hun product

maximaal als $x_1=x_2=\ldots=x_n=\dfrac{80}{n}$.

Als we in een partitie van 80 ook *niet-gehele* delen toestaan, dan kunnen we het product aanzienlijk vergroten. De bovenstaande stelling zegt dat zo'n partitie dan moet bestaan uit gelijke delen.

De partitie $80=\underbrace{\frac{8}{5}+\frac{8}{5}+\ldots+\frac{8}{5}}_{50}$ geeft een product van

$\left(\dfrac{8}{5}\right)^{50}\approx 0{,}161\cdot 10^{11}$.

In hoeveel gelijke delen moeten 80 partitioneren om het grootste product te krijgen? Daartoe bekijken we

de functie $f(x)=\left(\dfrac{80}{x}\right)^{x}$.

Uit de grafiek van *f* zien we dat, onder de voorwaarde dat *x* geheel is, de grootste functiewaarde wordt bereikt voor *x* = 30. De partitie in 30 gelijke delen geeft dus het grootste product.

Met $80=\underbrace{\frac{8}{3}+\frac{8}{3}+\ldots\frac{8}{3}}_{30}$ hebben we een maximaal

product van $\left(\dfrac{8}{3}\right)^{30}\approx 0{,}601\cdot 10^{13}$.

Om na te gaan hoeveel dit product verschilt van het maximum van de functie *f*, differentiëren we de functie en zien, dat er een maximum is voor
$x=\dfrac{80}{e}$
Het bijbehorende maximum is gelijk aan

$e^{80/e}\approx 0{,}605\cdot 10^{13}$. Dit maximum kan worden opgevat als het product van de volgende partitie van 80:
$80=\underbrace{e+e+\ldots e}_{29}+(0{,}402\ldots)\cdot e$

Literatuur

[1] R. Bosch: Maximaliseren zonder differentiëren. In: Euclides 80 (1), 2004.

Over de auteur

Rob Bosch (e-mailadres: r.bosch2@mindef.nl) is als docent verbonden aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda. Hij is tevens redacteur van Euclides.

SLASH21 - ANDERS LEREN

Op diverse scholen in Nederland wordt geëxperimenteerd met nieuwe vormen van leren. Zo ook op Slash21 in Lichtenvoorde. Een interview.

[Marja Bos]

FIGUUR 1 De ontwikkelgroep: (vlnr) Pieter van der Zwaart, Leo van Loon, Hannie Lensink, Hans Geurts



Ontdekkingsreis

Een nieuwe vorm van leren – wat moet ik me daar precies bij voorstellen? En hoe wordt dat dan vormgegeven voor *wiskunde*?

In de informatiebrochure van de in 2002 gestarte school /21 (spreek uit: Slash 21) staat te lezen: 'Een school als een ontdekkingsreis. (...) Samenleving en arbeidsmarkt vragen nu eenmaal heel andere kwaliteiten dan in het verleden. Het onderwijs moet daarop inspelen. Om dat doel te bereiken, zet /21 zwaar in op de computer als leermiddel. Door de creatie van een elektronische leeromgeving, die het mogelijk maakt dat de leerlingen zelfstandig en toch begeleid werken.' Daar wilde ik meer van weten.

Domweg nieuwsgierig reed ik op een mooie dag in april naar Lichtenvoorde. Ik had een afspraak met Hannie Lensink en Pieter van der Zwaart, beiden betrokken bij de vormgeving van het wiskundeonderwijs op 'Slash'. Hannie is één van de Slash-tutoren, en daarnaast verantwoordelijk voor een deel van de leerstofontwikkeling, Pieter is extern ontwikkelaar en vanuit de SLO belast met de externe ondersteuning. Daarnaast legde ik schriftelijk enkele vragen voor aan Willem van Gaans, projectleider van /21 vanuit KPC Groep.

De school

Slash21 maakt deel uit van Scholengemeenschap Marianum te Groenlo, een school die onder de Stichting Carmelcollege ressorteert. Slash21 werd de 21ste school van deze stichting, en is bovendien opgericht als 'een 21ste eeuwse school' - vandaar de naam.

De school, een samenwerkingsproject van de Stichting Carmelcollege en KPC Groep, ging van start op 1 augustus 2002; het eerste cohort leerlingen zit dus sinds kort in leerjaar 3 (website: *www.slash21.nl*).

'Slash' biedt een complete vmbo-opleiding aan, leerlingen op havo- en vwo-niveau stromen na het derde jaar door naar de reguliere bovenbouw van het Marianum.

Het gebruikelijke vakkenpakket heeft plaats gemaakt voor de hoofdstromen *Mens en Maatschappij* en *Mens en Natuur*. De traditionele schoolvakken zijn grotendeels geïntegreerd in *themablokken* zoals 'Macht', 'Energie' en 'Communicatie'. Kernconcepten uit diverse vakgebieden worden aldus in onderlinge samenhang aangeboden. Leerlingen werken 15 dagdelen aan één zo'n thema.

De vakdocent is vervangen door een zogeheten tutor; de nadruk wordt daarbij gelegd op diens coachende rol. Samen met de teamleider vormen tutoren en onderwijsassistenten een team dat drie jaar lang verantwoordelijk is voor onderwijs en begeleiding van een vaste groep leerlingen. Tutor en onderwijsassistent hebben allebei een begeleidende taak, maar een tutor coördineert de blokken en heeft de uiteindelijke verantwoordelijkheid.

Er zijn geen klassen, maar *stamgroepen* – groepen van ca. 50 leerlingen. Drie stamgroepen van drie opeenvolgende leerjaren vormen samen een *basisgroep*, begeleid door een vast team.

Gewone lokalen zijn er evenmin; er zijn flexibel inzetbare ruimtes van diverse afmetingen.

Workshops door leerlingen

Als ik de school binnenwandel, is een groepje van 12 tweedeklassers onder het toeziend oog van Hannie net bezig met een workshop. Daarin geven ze om beurten in tweetallen een presentatie aan hun medeleerlingen. Elk duo heeft een representatieve opgave moeten voorbereiden, en legt die nu uit aan de rest. Het gaat om opgaven uit een tweetal algebra/analyse-hoofdstukken waarvan de leerstof eerder die week door een tutor met inhoudelijke kennis van zaken in een hoorcollege-achtige setting van een half uur kort is geïntroduceerd, en die vervolgens door de leerlingen verwerkt is, deels vanuit het leerboek (*Moderne wiskunde*), deels met behulp van didactische software en digitale oefentoetsen.

Het is de tweede dag van een serie van drie achtereenvolgende ochtenden waarop de tweedejaars zich niet met thema's maar met alleen wiskunde (algebra) bezig houden. Vlak voor kerst was er een serie van zes van zulke algebradagdelen, in juni volgen er dan nóg twee dagdelen. De eerste- en derdejaars kennen eveneens een dergelijke cursus *Taal van de wiskunde*, speciaal ontworpen voor de algebra. In tegenstelling tot de algebra komen de andere wiskundeonderdelen min of meer geïntegreerd binnen de thema's aan de orde.

Na de presentaties oefenen de leerlingen die ochtend nog zo'n vijf kwartier verder, tot het middaguur. Ook de volgende ochtend zal daaraan besteed worden. Ze zoeken zelf een plek, en gaan alleen of samen met anderen aan de slag met materiaal (digitaal of het leerboek) waar ze eigen keuzes uit maken. De week erop zal een toets volgen over de bijbehorende twee hoofdstukken én over een algebrahoofdstuk dat al eerder aan de orde is geweest. De leerlingen mogen bij die toets een A4-tje met eigen aantekeningen gebruiken ('spiekbrief').

Als de leerlingen uitwaaieren over de werkruimten, krijg ik de kans om wat vragen te stellen aan Hannie en Pieter.

Hannie, wat is eigenlijk het idee achter Slash21?

Ik zal een paar kenmerken noemen. Op Slash21 vormen niet de wetenschappelijke disciplines het uitgangspunt voor wat er geleerd moet worden, maar dingen die je om je heen ziet: wat wil je daarvan weten? Wat is belangrijk om te leren? We houden de opdrachten heel open, met veel nadruk op eigen onderzoek, en zo proberen we de leerlingen aan te zetten tot de formulering van hun eigen leervragen. Waar mogelijk, is ons onderwijs vraaggestuurd. Daarmee wordt het leren meer leerling- en leefwereldgericht, meer gericht op vaardigheden. En dan niet alleen op presentatievaardigheden, maar bijvoorbeeld ook op vaardigheden die te maken hebben met 'weten hoe je het beste leert', en op pedagogische kwesties als hoe je een medeleerling erop aanspreekt wanneer hij niet goed werkt. Er is meer (keuze)vrijheid en veel zelfverantwoordelijkheid voor leerlingen. Samenwerken in heterogene groepen vinden we belangrijk. Maar let op: het is geen 'Iederwijs'-school, geen school waar de leerlingen zelf de inhoud van hun onderwijs bepalen.

Er zijn – naast veel vrijheid in zelf te bepalen doelen - ook vastgestelde leerdoelen en eindcriteria.

Willem, kun jij daar nog wat aan toevoegen?

De leerstof binnen /21 en het leerproces worden vanuit het constructivisme vormgegeven. Het gaat vooral om 'kennis als inzicht'. De twee andere uitwerkingen van kennis, namelijk het vergaren van feiten en het inslijpen van patronen, zijn hierbij ondersteunend en complementair. Samengevat komt de filosofie neer op het leren door het verkrijgen van inzichten in thema's (Gestalten) uit de werkelijke wereld: inzichten die er toe doen. Voorbeelden zijn macht, evenwicht, groei, het stoffelijke. Naast deze inzichten leren leerlingen ook de cognities, zoals in het reguliere onderwijs. Verder is er veel aandacht voor persoonlijke kwaliteiten, competenties.

En hoe krijgen die ideeën vorm in jullie wiskunde-onderwijs?

Hannie en Pieter: Het meest kenmerkende is eigenlijk dat je de leerlingen de keuze biedt in de manier waarop zij zich de wiskunde eigen maken. Op Slash zijn er allerlei manieren waarvan je als leerling gebruik kunt maken: er zijn boeken met antwoordenboek beschikbaar, toetsprogramma's en applets op de computer, leerlingen kunnen uitleg krijgen van hun tutor, een workshop bezoeken van hun tutor of van een medeleerling... Het gaat dus niet zozeer om contexten binnen sommetjes, maar om adequaat *bronnen*gebruik bij vraagstellingen vanuit de leef-wereld. ICT, in het bijzonder de elektronische leer-omgeving, is daarbij één van de bronnen die aangeboden wordt – maar er zijn er zoals gezegd ook diverse andere.

Het wiskundeonderwijs op /21 valt in drie componenten uiteen, ieder met zijn eigen kenmerken:
- De zogeheten 'inslagen': wiskunde als gereedschap. Het is de bedoeling dat de opdrachten in de thema-blokken vragen oproepen waarbij als vanzelf de behoefte aan wiskundige technieken en instrumenten gecreëerd wordt om het probleem te kunnen oplossen.

FIGUUR 2 Voorbeeld van een dag- en weekprogramma

Tijdstip	Activiteit
08.30	Beginnen in de thuisbasis. Opdrachten opzoeken in de Elektronische Leeromgeving in de webQuest Engels.
09.00	Samen met een groepje werken aan een collage voor Engels.
10.10	Even met het groepje iets drinken in de huiskamer.
10.25	Een gesprek voeren met de assistent Engels.
11.00	Opdrachten maken in de WebQuest Engels.
11.45	Middagpauze
12.15	Naar een video kijken over Energie.
13.00	Voorbereiden proefjes voor Energie.
13.45	Even wat drinken.
14.00	Proefjes doen.
15.15	Planning maken voor morgen en opruimen.
15.30	Naar huis.

	Maandag	Dinsdag	Woensdag	Donderdag	Vrijdag
Ochtend	Engels	Engels	Engels	Energie	Energie
		Sport			
	Middagpauze				
Middag	Energie	Energie		Engels	Engels
					Zwemmen

Denk maar aan het omzetten van een recept (verhoudingen) of het weergeven van data (tabel, grafiek). Bij het blok 'Energie' is er bijvoorbeeld een opdracht om een verslag van een experiment te maken waarbij in ieder geval een grafiek is opgenomen.
Soms wordt zo'n inslag door ons speciaal bij het themablok ontworpen, soms nemen we simpelweg een hoofdstuk uit een bestaande methode. Het gaat bij de inslagen vooral om rekenvaardigheden, statistiek en grafieken.
- Wiskunde die helpt de wereld om je heen te begrijpen, te analyseren, te waarderen. Deze component vind je terug in een aantal *meetkundeprojecten*. Eigenlijk gaat het hier om een toegevoegd thema rond vorm en vormgeving; meetkunde bleek namelijk niet goed inpasbaar in de themablokken. Het is nu een gezamenlijk project van wiskunde en expressie geworden. Het idee erachter is dat leerlingen via het project in aanraking komen met twee- en driedimensionale vormen. De kleinere cognitieve onderwerpen binnen de meetkunde die dan blijven liggen zijn vrij gemakkelijk in te halen, veel gemakkelijker dan een achterstand in de algebra.
- Wiskunde die je moet weten om straks in de bovenbouw verder te kunnen, en die niet 1-2-3 onder de vorige twee invalshoeken is onder te brengen. Dat betreft vooral de *algebralijn*. Deze is dan ook ondergebracht in een aparte cursus 'taal van de wiskunde', drie sessies van 12 dagdelen per leerjaar. In het derde leerjaar zal dat iets ruimer bedeeld zijn.

Ook binnen de thema's leggen we overigens, via de inslagen, een duidelijke link met analyse.

Op deze manier denken we maximaal recht te doen aan het Slash-concept en daarbinnen toch ook optimaal recht te doen aan de wiskundige ontwikkeling van de leerlingen.
Je kunt het zien als een soort werkplaats-structuur. In die werkplaats voer je een taak uit. Welk instrument je

FIGUUR 3 Algebraprogramma vmbo-3 GL/TL, Taal van de wiskunde (verkort)

Wat gaan we doen?

In klas 1 en 2 heb je al kennis gemaakt met een aantal onderdelen uit de algebra. We gaan die onderdelen nu verder uitdiepen.
Voor dit onderdeel krijg je in totaal 4 dagdelen. Deze dagdelen zijn verdeeld in twee sessies van elk 2 dagdelen: week 36 en week 46.
Je werkt met het volgende materiaal:

1. Winnende Formules
Dit is lesmateriaal waarin je zelf formules bedenkt en die met elkaar vergelijkt. Daarbij maak je gebruik van het computerprogramma VU-Grafiek.
Opgave 34 t/m 37 zijn extra oefening.
Van opdracht 35 zit een aantal onderdelen in de workshops.
36 is extra moeilijk.
Maak je van 37 iets moois, dan bestaat de kans dat die inderdaad in de toets wordt opgenomen.

2. Het mavo/vmbo-boek, deel 3a
Daaruit doe je van hoofdstuk 1 de paragrafen 1, 2 en 4. Omdat de boeken er nog niet zijn krijg je kopieën.
Minimum advies:
Paragraaf 1: Opdrachten 1, 2 en 3.
Paragraaf 2: Opdrachten 6, 7, 8 en 10.
Paragraaf 4: Opdrachten 20, 21, 22 en 23.
Wil je wat dieper op de stof in gaan, dan is de Plusparagraaf beschikbaar.

Toets
Op het eind van deze derde cursus krijg je een toets. Je mag meenemen:
- één eigengemaakt A4 met aantekeningen
- rekenmachine

Hoe?
Er zijn meerdere 'bronnen' om de stof te oefenen:
- *Workshops* die *leerlingen* aan elkaar geven. Volgens een rooster ga je in week 46 in heterogene duo's (per drie tafelgroepen) één som voorbereiden en presenteren/uitleggen aan je medeleerlingen. Je kunt ter voorbereiding van de presentatie de som alvast uitwerken op een flap. Je leert zelf van het uitleggen en je leert van het luisteren naar medeleerlingen.
- De *lesbladen* Winnende Formules. Ook hiervan zijn antwoorden beschikbaar, echter soms moet je zelf de antwoorden controleren met behulp van de computer.
- Op het netwerk staat het programma *VU-Grafiek*. Je werkt met het document VU-Grafiek Winnende Formules. Als je dat document hebt geopend, bewaar je dat onmiddellijk onder een eigen naam, bijvoorbeeld WF-Annemarije.
- Het *boek* met bijbehorend antwoordenboekje. Let op: je hoeft niet alle sommen te maken. Als je de sommen van een paragaaf snapt, kun je doorgaan met de volgende paragraaf.
- Op het netwerk vind je het programma *Wintoets* met oefentoetsen.
- Korte (maximaal 30 minuten) '*workshops*' door de *wiskunde-tutor* (voor wie dat wil/nodig heeft) tijdens het eerste dagdeel.
- *Medeleerlingen* kunnen vaak heel goed uitleg geven. En natuurlijk elke tutor, die je vragen kunt stellen.
- Software voor het 2^{e} leerjaar (als je wilt herhalen) op http://mm.marianum.nl → Mixed multimedia methodes → *Wiskdisk*, en dan zelf het niveau en het onderwerp kiezen wat jij het best vindt passen.

FIGUUR 4 Rooster leerlingenworkshop bij Taal van de wiskunde (zie ook figuur 3)

Workshops [illegible]	Uitleg door homogeen duo	Tijdstip	Opgave
Tafelgroep 1	X	9.00	Hfdst. 1 G-2 (p. 28)
	Y	9.10	Hfdst. 1 E-4 (p. 26)
	Z	9.20	Hfdst. 1 E-6 (p. 27)
Tafelgroep 2	X	9.30	Hfdst. 1 E-7 (p. 27)
	Y	9.40	Hfdst. 1 T-1 (p. 24)
	Z	9.50	Hfdst. 1 T-2 (p. 24)
Pauze		10.00-10.15	
Tafelgroep 3	X	10.20	Winnende Formules 35 b
	Y	10.30	Winnende Formules 35 c
	z	10.40	Winnende Formules 35 d

Bereid het voor door bijvoorbeeld de som uit te werken op een flap.

daarvoor als leerling pakt (boek, elektronische leeromgeving, applet, medeleerling, tutor...), dat bepaal je zelf.
Het gaat er niet om dat je kunt laten zien dat je de opgaven gemaakt hebt, het gaat erom dat je uiteindelijk laat zien dat je je *doel* bereikt hebt. En die verantwoordelijkheid blijft bij de leerling, hij moet zich wél verantwoorden. Hoe die verantwoording eruit ziet hangt af van het onderwerp. Bij 'de taal van de wiskunde' (de aparte cursus) is het een toets, bij 'grafieken' is het een plaatje (als onderdeel van een verslag over een experiment), en bij 'meetkunde' is het een ontwerp met toelichtende verantwoording.
Willem: Het belangrijkste is dat wiskunde niet als een verzameling van-de-werkelijkheid-losstaande cognities wordt aangeboden, maar zoveel mogelijk geleerd wordt als inslag binnen de leergebieden *Mens en Maatschappij* en *Mens en Natuur*. De eerlijkheid gebiedt me te zeggen, dat we daar nog niet volledig in geslaagd zijn en wellicht nooit volledig in zullen slagen.

Kennelijk wijkt de Slash-aanpak voor wiskunde toch enigszins af van die voor de andere vakken: niet elk wiskundeonderdeel wordt geïntegreerd binnen thema's.
Hannie: Het is een soort mix. Een deel (de algebra) wordt net als bij de moderne vreemde talen aangeboden via de onderdompelingsmethode (langere tijd aaneen), maar het grootste deel van de wiskundeleerstof wordt toch geïntegreerd binnen de thema's.
Pieter: Sommige onderwerpen zijn lastig aan de orde te stellen binnen een thema. Zo zijn er weinig aansluitingsmogelijkheden voor meetkunde, en de analyse lijkt wat vroeg te komen om een duidelijke rol te krijgen. De aanpak van deze onderwerpen 'verslashen' we wel zo veel mogelijk. Dat wil zeggen, de leerlingen krijgen materiaal aangeboden om mee te leren, en te controleren of ze hebben geleerd, maar bepalen wel in hoge mate hun eigen leerroute. Wil een leerling eerst eens via de diagnostische toets kijken wat-ie er al van weet, dan bepaalt hij dat zelf. De tutor heeft hier vooral een coachende rol.

FIGUUR 5 Een leerling aan het werk



Pieter, welke didactische principes vind jij van belang voor het wiskundeonderwijs op Slash?
De wiskunde moet *betekenisvol* zijn voor de leerlingen, en bovendien *toepasbaar*: de reden *waarom* je dingen leert mag geen discussiepunt zijn. De leerling moet de zin kunnen inzien van wat hij of zij leert. Verder wil ik geen klakkeloze kennis. Je moet eerst begrijpen wat je aan het doen bent, voordat je iets tot routine gaat maken, of gaat formaliseren en abstraheren.
Je merkt als ontwerper in het algemeen dat heel veel wiskunde op school alleen maar wordt geleerd om straks nog méér wiskunde te kunnen leren. Vanuit een wiskundeleerlijn gedacht misschien terecht, maar vanuit de Slashgedachte volstrekt onbruikbaar en onterecht. Veel onderwerpen die in de huidige schoolboeken eerst uitgebreid worden behandeld en ingeslepen, kunnen naar mijn mening waarschijnlijk veel beter worden geleerd als ze terugkomen op de momenten dat je ze nodig hebt.

Hoe zit dat dan met de algebra?
Pieter: De algebraleerlijn is een uitzondering; bij gebrek aan een goed alternatief pakken we dat op Slash nog wél concentrisch aan.
Ook binnen de invalshoek van Slash geef je kinderen natuurlijk volop de kans om te generaliseren, te abstraheren en te formaliseren. Maar het argument daarvoor is *niet*: 'omdat het wiskundecurriculum dat wil'. In feite zal de wereld van de leerling, zoals aangeboden binnen thema's en projecten, daar een stimulans toe moeten geven. En het is dan aan de leerling om die kansen op te pakken.
De lange leerlijnen bij wiskunde dwingen ons er toe om toch iets te doen met het officiële wiskundeleerplan, en dat gebeurt dan ook in 'De taal der wiskunde' (**zie figuur 3**). En of dat nou een Fremdkorper binnen Slash is of juist een verrijking die echt iets toevoegt, daar ben ik nog steeds niet helemaal uit.

In de literatuur over wiskundedidactiek vind je eigenlijk altijd veel nadruk op het belang van een adequate fasering, een effectieve opbouw in het leerproces. Denk bijvoorbeeld aan stadia als oriëntatie, verwerving, explicitering, verwerking... Jullie lijken het totaal anders aan te pakken. Vertel eens?
Hannie: Onze vakdidactische opbouw is helemaal niet meer zo lineair! In ieder geval structureren we dat niet meer op een dergelijke manier vóór; de leerling maakt eigen keuzes in de volgorde waarin hij zich de leerstof eigen maakt.
Natuurlijk hebben we wel de drie sessies in de algebra, waardoor er herhaald en/of verdiept wordt.

Reflecteren op de leerstof is niet iets dat leerlingen uit zichzelf automatisch doen; reflectie moet volgens mij 'georganiseerd' worden. Maar de tutor heeft op Slash een enigszins 'teruggetreden' rol. Hoe organiseren jullie het dan zó, dat de leerling wel degelijk 'stilstaat' bij wat-ie geleerd heeft?
Hannie: Dat vind ik zelf het allerlastigste. Want eigenlijk is de mens in het *algemeen* niet gemakkelijk te verleiden tot reflectie! Ook ikzelf merk dat ik snel geneigd ben om maar door te stomen en soms gedwongen moet worden (bijvoorbeeld door dit interview!) om na te denken over m'n aanpak.
Er zijn bij Slash verschillende momenten waarop reflectie gestimuleerd wordt:
- Bij toetsnabesprekingen.
- Als leerlingen zelf bij je komen met vragen. Ook loop je natuurlijk wel rond en kijk je mee met leerlingen. Op die momenten stel je wel vragen die reflectie uitlokken, maar dat is dus niet mogelijk bij alle 50 leerlingen.
- De werkvorm van het onderwijsleergesprek kun je niet zomaar spontaan laten plaatsvinden, dat moet je 'inplannen' in de wiskundeworkshops.
- In de workshops (**zie figuur 4**) die de leerlingen aan elkaar geven (met een poster van een uitgewerkte som). Dat dwingt ook tot reflectie, omdat je het als leerling zelf moet gaan uitleggen aan je medeleerlingen.
- Het A4-tje dat je als leerling mag maken om als 'spiekpapiertje' bij een toets te gebruiken, stimuleert om alles nog eens op een rijtje te zetten.
- Bij het meetkundeproject moeten de leerlingen een toelichting geven bij hun ontwerp. Dat dwingt ook tot reflectie.

Wat zijn volgens jullie de grote voordelen van de Slash-aanpak?
Hannie: De verantwoording ligt bij de leerling. We bieden allerlei bronnen aan, we hebben een dienende rol... maar de verantwoording ligt bij de leerling om te gebruiken wat hem goed dunkt, natuurlijk altijd in-gesprek-mèt... maar we dwingen niet, want uiteindelijk moet een leerling het zelf willen. Het afdwingen is toch altijd een schijnzekerheid.
Hannie en Pieter: De leraar vertelt niet meer, *dat* de leerling moet leren en waarom hij dat moet leren. Het *willen* leren leggen we bij de leerling. Het is geen tunnel waar je ze allemaal doorheen jaagt, maar het is een vrij veld geworden met een start (die moet motiveren, zodat je naar het einddoel *wilt* gaan lopen), en een duidelijk einddoel.

Maken leerlingen ook eigen keuzes met betrekking tot het niveau waarop ze met wiskunde aan de slag gaan?
Hannie: De leerlingen kiezen bij elk onderwerp opnieuw of ze het *basisniveau* kiezen (bestemd voor leerlingen die na leerjaar 2 de opleiding vmbo-basiskader gaan doen), of het *volledige* niveau (voor leerlingen die van plan zijn vmbo-GL/TL te gaan doen; zij gebruiken het mavo/havo-boek), of het *uitgebreide* niveau leidend tot havo/vwo-3 (zelfde boek, maar dan inclusief de plusparagrafen en/of verdieping met hoofdstukken uit het havo/vwo-deel).
Oefenstof en toets zijn op twee niveaus samengesteld: vmbo-basiskader/GT en GT/havo/vwo. Een leerling bepaalt zelf het niveau waarvoor hij wil werken. Achteraf (dus na de toets) krijg je als leerling meerdere 'uitslagen'. Stel dat je had gekozen voor vmbo-basiskader/GT, dan krijg je een waardering op vmbo-BB/KB-niveau en een waardering op GL/TL-niveau.

Het cijfer is niet bedoeld als niveaubeoordeling, maar meer als indicatie over hoe je verder kunt. Na verloop van tijd ontstaat dan een beeld van het niveau waarop de leerling uiteindelijk de bovenbouw het beste zal kunnen en willen vervolgen.
Tussentijds naar een ander niveau overstappen kan altijd; dat bepaalt de leerling zelf.

Waar lopen jullie tegen aan, waar ben je nog niet helemaal uit? Wat vind je tot nog toe lastig te realiseren binnen de gekozen randvoorwaarden?
Hannie en Pieter: De wiskunde te laten leren gebruiken als gereedschap, dat valt nog niet mee. Het plannen van oefen- en inslijpmomenten is lastig. Leerlingen willen in het algemeen graag leren - maar wanneer zijn zaken voldoende geautomatiseerd? En vooral ook: wat zijn effectieve momenten om dat te doen? Daar zijn wij nog niet goed uit.
Hannie: Leerlingen worden minder bij de hand genomen. Voor sommigen is dat lastig, maar ze leren daar ook weer van. Ik heb soms wel het idee dat leerlingen vaker hun neus stoten: in een ‘gewone klas’ had ik meer drempels kunnen weghalen, rimpels al weggestreken, meer ze onvrijwillig ‘meegetrokken’. Op de ‘kleine dingetjes tussendoor’ heb je minder controle. De feedback daarop is lastig en hangt af van de toevallige aanwezigheid van een tutor op dat moment.

Zitten er ook structurele nadelen aan de Slash-aanpak? Ben je bijvoorbeeld niet bang dat je er te laat bij bent als een leerling een verkeerd beeld van een belangrijk wiskundig concept opbouwt?
Hannie: Je hebt als begeleider beslist minder controle op het leerproces. Maar heb je dat in het traditionele onderwijs wél? Of is dat schijnzekerheid? Je moet hier wat dat betreft leren ‘loslaten’, en maar wat meer vertrouwen hebben dat het goedkomt.
Hannie en Pieter: De Slash-aanpak beperkt je om lange leerlijnen neer te zetten. Dat je daarvoor terugkrijgt hoe een leerling zich in de breedte ontwikkelt, dat is winst.

Nu, april 2004, is er nog geen leerjaar 3; daarmee wordt pas na de zomer gestart. Hebben jullie voor die leerlingen dezelfde aanpak voor ogen als voor de eerste- en tweedejaars?
Pieter: De leerlingen die doorgaan met vmbo-BB/KB verlaten Slash en gaan door op de Marianumvestiging die direct naast de Slash-school ligt. Dat valt voor nu even buiten onze scope.
3 havo/vwo en 3/4 vmbo-GT blijven binnen Slash. Daar ligt dus onze ontwikkelverantwoordelijkheid. In vergelijking met leerjaar 1 en 2 is er een verandering in focus. Voor havo/vwo wordt de aansluiting met 4 havo/vwo en de achterliggende profielkeuzen belangrijker. Voor vmbo-GT ligt er een examen in het verschiet.
De inhouden uit het wiskundeprogramma blijken hier iets gemakkelijker te koppelen aan de thema’s: het onderwerp *Functies* komt als inslag terecht in het thema ‘Kracht’, het onderwerp *Groei* krijgt z’n plek in het thema ‘Leven’. Ook voor de andere wiskunde-blokken is zo’n koppeling gemaakt: *Meetkunde* aan het thema ‘Stoffelijk’ en *Statistiek* aan het thema ‘Toerisme en recreatie’. Alle blokken zijn natuurlijk wel weer zo veel mogelijk ‘verslashd’.

Er zijn vast mensen nieuwsgierig geworden naar jullie aanpak. Hoe kunnen zij zich nader informeren?
Hannie: Op 6 november, tijdens de studiedag van de NVvW, leid ik samen met Pieter een werkgroep over dit onderwerp[1]. Iedereen is daar natuurlijk van harte welkom!

Tot slot over de geïnterviewden

Hannie Lensink (e-mailadres: *hlensink@marianum.nl*) is voor 0,5 fte tutor bij /21 en voor de andere helft auteur/ontwikkelaar voor de ‘Mens en Natuur’-blokken en wiskunde (coördinatie, uitvoering en revisie). Zij volgde eerst de agrarische lerarenopleiding en daarna de studie onderwijskunde. Bij de SLO (wiskunde-VO) studeerde zij af met een onderzoek naar zelfstandig leren.

Pieter van der Zwaart (e-mailadres: *P.vanderZwaart @slo.nl*) is vanuit de SLO betrokken bij /21 als extern ontwikkelaar voor wiskunde: lesmateriaal maken, maar vooral ook het verkavelen van de wiskunde in het totale onderwijsaanbod van /21 en het vasthouden van de langere lijnen.

Willem van Gaans (e-mailadres: *w.vangaans @kpcgroep.nl*) is projectleider van /21 vanuit KPC Groep en daardoor verantwoordelijk voor de ontwikkeling van het curriculum. Tot 1986 was hij werkzaam als leraar wiskunde, daarna is hij gaan werken bij KPC Groep als adviseur/projectenmanager.

Noot

[1] Zie Euclides 80 (1), p. 36.

Over de auteur

Marja Bos (e-mailadres: m.g.w.bos@home.nl) is wiskundedocent aan het Carmelcollege Emmen. Daarnaast is zij hoofdredacteur van Euclides.

1. In Sprokkel LV besprak R. Kooistra twee oplossingen van het vraagstuk:

> In $\triangle ABC$ is $\alpha = \beta = 80°$. Op AC ligt het punt D zo, dat $\angle DBA = 60°$ is, en op BC het punt E zo, dat $\angle EAB = 50°$ is. Bewijs: $\angle EDB = 30°$.

en stelde daarin, dat zijn op spiegeling berustende (tweede) oplossing de voorkeur verdient boven bewijzen, die op het trekken van weinig voor de hand liggende hulplijnen steunen.

Hierop ontving de redactie de volgende reacties van prof. dr G. R. Veldkamp (2) en R. Troelstra (3 en 4), waarvoor zij de inzenders gaarne dankzegt.

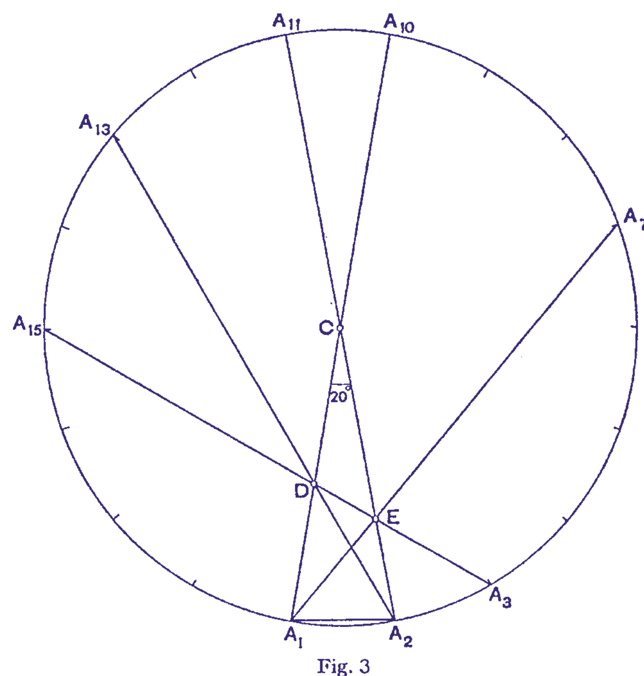


Fig. 3

4. De tophoek van 20° doet een verband vermoeden met de regelmatige achttienhoek. Zie fig. 3, waarop alle hoekgrootten kunnen worden afgeleid uit bogen van de cirkel (C, CA_1), die veelvouden van 20° zijn. In een regelmatige achttienhoek kan men vele drietallen concurrente diagonalen aanwijzen; zo zijn A_1A_7 en A_3A_{15} elkaars gespiegelden in A_2A_{11}, die beide in E snijdt. Ook kan worden aangetoond, dat A_1A_{10}, A_2A_{13} en A_3A_{15} door één punt D gaan, bv. met behulp van de sinusvorm van de stelling van Ceva, toegepast in $\triangle A_2A_{10}A_{15}$. Men overtuigt zich nu gemakkelijk ervan, dat de ligging van de punten D en E in $\triangle A_1A_2C$ geheel overeenkomt met die in de gelijkvormige driehoek ABC van het vraagstuk; $\angle EDA_2 = {}^1/_2(\text{bg } A_2A_3 + \text{bg } A_{13}A_{15}) = 30°$.

R. T.

Gedeelten uit 'Sprokkel LX', opgenomen in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 52 (1964-1965), blz. 98-100.

Deze aflevering van de rubriek '40 jaar geleden' wordt opgedragen aan Aad Goddijn, en wel vanwege opgave 52 in de Nieuwe Wiskrant 7, nummer 4 (juli 1988), blz. 39, met oplossingen in de Nieuwe Wiskrant 8, nummer 1 (oktober 1988), blz. 37-38.

De rubriek '40 jaar geleden' wordt verzorgd door Martinus van Hoorn (e-mailadres: mc.vanhoorn@wxs.nl), voormalig hoofdredacteur van Euclides (1987-1996).

NIOC: EVENEMENT ÉN ONTMOETINGSPLAATS

Congres over informaticaonderwijs

[Jos Tolboom]



Inleiding

Op woensdag 3 en donderdag 4 november wordt in Groningen het zevende Nationaal Informaticaonderwijs Congres (NIOC) gehouden. Een must voor de informaticadocent, maar zeker ook interessant voor de wiskundedocent. De wetenschappelijke discipline informatica is voor het belangrijkste deel afkomstig uit de wiskunde, maar heeft zich de afgelopen dertig jaar ontwikkeld tot een discipline waarin de wiskunde nog wel een belangrijke rol speelt, maar er ook tal van andere invloeden belangrijk zijn. Op dit moment zien we in Amerikaanse informaticacurricula de rol van wiskunde weer sterker worden. Hoe Nederlandse instellingen hier mee omgaan is een interessante vraag die zeker aan de orde zal komen.

Van het belang van ICT voor de samenleving is iedereen inmiddels wel overtuigd. Goed onderwijs op dit gebied is dus noodzakelijk.

Daarnaast verandert het onderwijs in het algemeen. Was het vroeger voornamelijk éénrichtingsverkeer (de docent vertelt, de student/leerling probeert de informatie op te nemen), tegenwoordig gaat het onderwijs met zaken als studiehuis, leren-leren, competentiegericht leren en projectonderwijs steeds meer de kant op van zelfstandig leren: studenten/leerlingen moeten leren zelf uit te zoeken hoe de zaken in elkaar steken.

Ook op het gebied van congressen en het overdragen van kennis en ervaring veranderen de middelen. Naast luisteren naar een spreker, wordt actief opdoen van kennis en ervaring meer en meer gewaardeerd en lijkt bovendien efficiënter. Kennisoverdracht vereist steeds meer een grote variatie in vorm aangepast aan de persoonlijke leerstijl.

Dit alles is voor de stichting NIOC aanleiding om de vorm van het tweejaarlijkse congres te herzien.

NIOC: ontmoetingsplaats voor kennisuitwisseling

Ons ideaal is het NIOC uit te laten groeien tot een landelijke ontmoetingsplaats voor de uitwisseling van kennis, ervaring en ideeën op het gebied van informatica-onderwijs. Doel is een setting te organiseren waarbij informaticadocenten de ontmoetingsplaats ervaren als een plaats waar ze graag willen zijn om hun kennis en ervaring aan te bieden aan collega's en waar bovendien een groot aanbod is waar deze docenten van willen profiteren.

Er zijn programmacommissies voor informatica-onderwijs op het niveau van mbo, vo, hbo, wo en bedrijfsopleidingen. Iedere commissie heeft een voorzitter die communiceert met een algemeen programmaleider, die onder andere als taak heeft onderlinge kruisbestuiving mogelijk te maken.

Daarnaast is er ook plaats voor uitwisseling tussen bedrijven en onderwijsinstellingen, waardoor het delen van onderwijs en praktijk wordt belicht. Kennis en ervaring bij onderwijsinstellingen en kennis en ervaring bij bedrijven zijn hier complementair.

Het NIOC2004 zal, meer dan voorheen, de vorm krijgen van workshops, informele open ruimte discussies, discussietafels, presentaties, en postersessies. De ontmoetingsplaatsen worden voor en door de betreffende doelgroep met deze vormen ingericht.

Daarnaast zijn er toespraken van hoge functionarissen als Frans Zwarts, Rector Magnificus van de Rijks-universiteit Groningen, ter opening en van Jacques Wallage, burgemeester van Groningen, bij het diner. Keynotes zijn er van Jack van Wijk, hoogleraar



computervisualisatie aan de Technische Universiteit Eindhoven, Hans Appel, chief technology officer bij Sun Microsystems, en Ron Tolido, chief technology officer van CapGemini.

Gedragen door de onderwijsorganisaties

De ontwikkelingen binnen het (informatica)onderwijs vragen een congres dat wordt gedragen door onderwijs-organisaties. Zij zijn de motor achter de richting van de ontwikkelingen en geven ruimte in tijd en/of geld voor het deelnemen aan een bijeenkomst van kennis-uitwisseling.
Het NIOC2004 streeft naar een vorm van organisatie die wordt gedragen door de informaticaonderwijs-instellingen en/of koepelorganisaties van deze instellingen. Dit geldt voor zowel het reguliere onderwijs als voor het bedrijfsleven. Zij hebben het meeste belang bij kennisuitwisseling, kennis-vermeerdering en kennisdisseminatie. Er zijn inmiddels samenwerkingsovereenkomsten gesloten met dertig partijen op dit gebied.

Kennisuitwisseling als continu proces

Ons ideaal is om het NIOC2004 uit te laten groeien tot een aaneenschakeling van kennisuitwisseling. Kennisuitwisseling tussen informaticadocenten uit alle geledingen, uitmondend in het hoogtepunt, een twee-daagse ontmoeting in 2004.
Voorafgaand aan het feitelijke congres heeft het NIOC inmiddels een aantal tussentijdse bijeenkomsten georganiseerd. Dergelijke bijeenkomsten bevorderen de kennisdisseminatie en vormen een goede aanloop op hetgeen er op de tweedaagse ontmoeting in 2004 ter sprake zal komen.

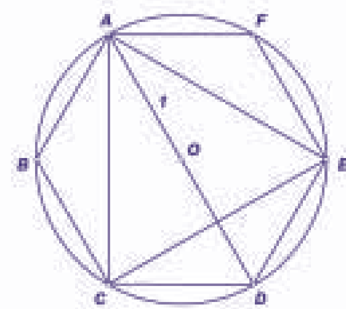
Ook de NIOC-website (*www.nioc.nl*) biedt als ontmoetingsplaats ondersteuning bij de uitwisseling. Per ontmoetingsplaats biedt de site mogelijkheden voor discussieboards, forumbijeenkomsten, FAQ's en daarnaast, per thema, mogelijkheden bieden ervaringen uit te wisselen door bijvoorbeeld artikelen te uploaden en van commentaar te (laten) voorzien.
Alle bovenstaande informatie en meer over NIOC2004 vindt u daar eveneens.
U zelf opgeven voor het bijwonen van het congres kan ook op deze site. We zien u graag op 3 en 4 november. Het NIOC is bovendien een prima aanleiding om Groningen weer een keer te bezoeken. Wie wil er niet dineren met Jacques Wallage?

Over de auteur

Jos Tolboom (e-mailadres: jos.tolboom@nioc.nl) is programmaleider NIOC2004.

Rekenen en bewijzen bij veelhoeken: triviaal of niet!

[Dick Klingens]



FIGUUR 1

Triviaal?

In 5-vwo (B12) legde ik bij het herhalen van de sinus- en de cosinusregel mijn leerlingen het volgende probleempje voor; zie figuur 1.

Van een regelmatige zeshoek ABCDEF is de straal R van de omgeschreven cirkel gelijk aan 1.
a. Bereken de lengte van de zijde en de lengtes van de diagonalen van die zeshoek. Pas daartoe de sinusregel toe in driehoek ABC.
b. Controleer de gevonden lengte van AC met de cosinusregel.

De meeste leerlingen moesten bij vraag a op weg geholpen worden met $\frac{b}{\sin\beta}=2R$ ('dat staat zo niet op de formulekaart, meneer!').[1]
En dat bij vraag b de cosinus van 120 graden ook zonder grafische rekenmachine gevonden kan worden met $\cos 120°=-\cos 60°=-\sin 30°=-\frac{1}{2}$, leek voor enkele leerlingen nieuw.
Maar toch, het merendeel van het rekenwerk is triviaal en dat vonden de leerlingen ook. Overigens, het niet-triviale komt nog.
De vraag die ik na het rekenwerk erop liet volgen was:

c. Bereken het product van de zijden en diagonalen die hetzelfde gemeenschappelijk hoekpunt hebben (bijvoorbeeld hoekpunt A).

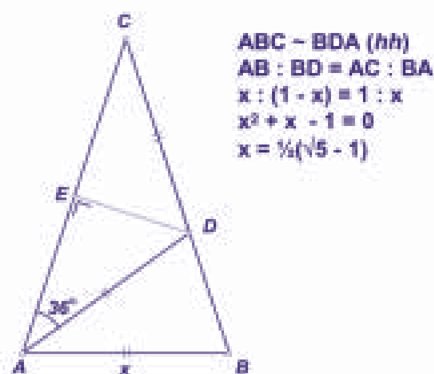
De uitkomst $6=1\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot 1$ bracht niemand op een idee. Blijkbaar was die uitkomst niet verrassend. Echter, m'n vraag

d. Geldt dit nu ook voor een regelmatige driehoek, vierhoek, vijfhoek, ...?

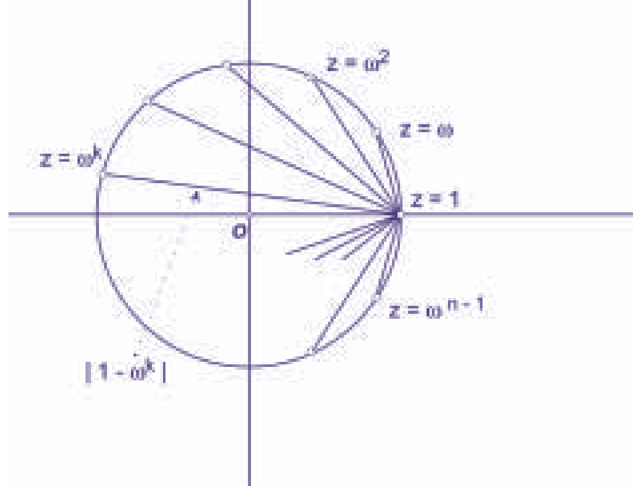
gaf aanleiding tot wat verwarring.
- Wat?
- Wat bedoelt u met 'dit'?
- Wat moeten we nu bewijzen?

'Laten we eerst maar eens kijken naar een regelmatige driehoek', was mijn antwoord. 'In de figuur van de zeshoek (zie weer figuur 1) zien we zo'n driehoek, *ACE*, en daarin is $AC\cdot AE=3$.'
- D'r zijn geen diagonalen! Is het dan wel goed?
- Dus dan moet er in een vierhoek 4 uitkomen?
- En bij een vijfhoek 5!
Ze hadden de vraagstelling begrepen. Reacties als 'Ja, dat is altijd zo' en 'Voor een vierhoek is het makkelijk' volgden. Enkelen verifieerden snel de uitkomst 4 bij een vierhoek. En hun 'Ja, het klopt' werd (als) vanzelfsprekend door de anderen geaccepteerd ('Je hebt de sinusregel helemaal niet nodig').
Bij de vijfhoek stokte het klassengesprek.
- Jammer, er gaat geen diagonaal door het middelpunt!
- Hoe groot is die hoek bij *B* eigenlijk?
- Je weet de sinus van 108 graden niet!
- Jawel joh, met je grafische!
- Hoe moet je nu de zijde *AB* berekenen?
Het was hierna even stil, ze dachten na, ze rekenden (met hun *grafische*). Ik hoorde eerst '1 komma 90' fluisteren en even daarna (naar mijn gevoel iets te snel erna) hardop: '*AB* is 1 komma 17 en nog wat'.
Op mijn vraag hoe hij (m/v) hieraan kwam, antwoordde de leerling (met een in het straatje van de docent passend antwoord): 'Gewoon twee keer gedeeld door 1,90 en toen de wortel getrokken'.
'Je bent dus uitgegaan van het antwoord 5', zei ik op een bijna bestraffende toon, 'Dat mag toch niet als je juist wilt bewijzen dat er 5 uitkomt!'
- Maar het klopt wel!
Na enige discussie beloofde ik voor de volgende les de berekening van de exacte waarde van de sinus en de cosinus van 36° voor hen op papier te zetten, hen tevens uitdagend tot hetzelfde. Ik gaf ze daarbij in overweging te kijken naar een gelijkbenige driehoek met basishoeken van 72° en dan 'iets' te doen met de bissectrice van een basishoek, én met gelijkvormigheid.

'Maar', was m'n slotvraag, 'hebben we nu bewezen dat de eigenschap ook geldt voor andere *n*-hoeken? Met



FIGUUR 2



FIGUUR 3

andere woorden, als een eigenschap geldt voor $n = 3$, ..., 6 geldt die eigenschap dan voor alle (gehele) waarden van n groter dan 6?'
(Opmerking. De lezer ga na dat de eigenschap ook geldt voor $n = 2$.)

Ze, mijn leerlingen, weten het ondertussen wel. Zo'n vraag van mij moet met 'nee' worden beantwoord (zie eventueel ook [3]).

Niet triviaal!

De volgende les deelde ik een A4-tje uit waarop het bewijs stond voor $\cos 36° = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$ en $\sin 36° = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.
Ze hebben nog even aan $n = 5$ gerekend (met hun *grafische*), ... en het klopte.
Een drietal had mijn uitdaging aangenomen, maar ze waren niet verder gekomen dan een plaatje en de gelijkvormigheid (zie figuur 2). Een van hen had DE getekend.
Had ik er misschien bij moeten zeggen AC gelijk aan 1 te nemen, en AB gelijk aan x?

Het bewijs van de stelling

Boven aan het papier stond ook, zonder bewijs, de in algemene termen geformuleerde stelling:
Als $A_1A_2\ldots A_n$ een regelmatige n-hoek is waarvan de straal van de omgeschreven cirkel gelijk is aan 1, dan is $|A_1A_2|\cdot|A_1A_3|\ldots|A_1A_{n-1}|\cdot|A_1A_n| = n$
'Het bewijs is niet zo triviaal', lichtte ik toe.
Ik vraag me af of ik hen daarmee *echt* in het onzekere heb gelaten omtrent de juistheid van die stelling...

De lezer wil ik dat in ieder geval niet. Een ander bewijs dan het onderstaande, bijna triviaal maar ongeschikt voor mijn 5-vwo, heb ik – tot nu toe – niet kunnen vinden (zie ook [2, pp. 157-162], waaruit ik mijn inspiratie putte voor de beschreven les).
Uit $x^n - 1 = 0$ volgt $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1) = 0$, met als triviale wortel $x = 1$.
De niet-triviale wortels, volgend uit de tweede factor van de ontbinding, zijn de andere n-de-machtseenheidswortels; in totaal dus $n - 1$:
$\omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \ldots,\ \omega^{n-1}$
die samen met $x = 1$ (of wellicht nu beter $z = 1$) in het complexe vlak een regelmatige n-hoek vormen met de eenheidscirkel (dus $R = 1$) als omgeschreven cirkel (zie figuur 3).
We kunnen nu schrijven:
$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 =$
$(x-\omega)(x-\omega^2)\ldots(x-\omega^{n-2})(x-\omega^{n-1})$
Voor $x = 1$ is het linker lid gelijk aan n; het rechterlid gaat dan over in $(1-\omega)(1-\omega^2)\ldots(1-\omega^{n-2})(1-\omega^{n-1})$
zodat we, na het nemen van de modulus van beide leden, vinden:
$n = |1-\omega|\cdot|1-\omega^2|\ldots|1-\omega^{n-2}|\cdot|1-\omega^{n-1}|$
De factoren in het rechter lid van de laatste uitdrukking zijn telkens gelijk aan de lengte van het lijnstuk dat het punt $z = 1$ verbindt met het punt $z = \omega^k$ ($k = 1, \ldots, n - 1$).
Voorwaar, bijna triviaal...

Anders dan mijn leerlingen ben ik *wel* nieuwsgierig naar een, uiteraard niet al te ingewikkeld, bewijs dat ik - wellicht in een volgend cursusjaar - in klassikaal verband zou kunnen geven...
Iemand van de lezers? Ik houd me aanbevolen!

Noten en literatuur

[1] Inderdaad. De 'uitgebreide sinusregel' hoort niet tot de B12-examenstof. Eigenlijk wel vreemd, omdat een groot deel van die stof toch over cirkels gaat.
[2] Ross Honsberger: Mathematical Diamonds. MAA (2003).
[3] Dick Klingens: Klassikaal, een kennismaking met volledige inductie. In: Euclides 79(5), pp. 236-237 (2004).

Over de auteur

Dick Klingens (e-mailadres: dklingens@pandd.demon.nl) is verbonden aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel. Hij is tevens eindredacteur van Euclides.

JAARVERSLAG EUCLIDES

Jaargang 79, 2003-2004

[Marja Bos]

Inleiding

In dit jaarverslag wordt een beknopt overzicht gegeven van de werkzaamheden van de redactie in de periode van 1 augustus 2003 tot en met 31 juli 2004.

Redactie

De redactie van Euclides bestond ook afgelopen cursusjaar uit een driehoofdige kernredactie (eindredacteur Dick Klingens, redactievoorzitter Gert de Kleuver en hoofdredacteur Marja Bos) en zeven redactieleden met zowel algemene redactietaken (becommentariëren en genereren van artikelen) als een eigen aandachtsgebied: Bram van Asch (recensies), Klaske Blom (didactiek), Rob Bosch (wiskundige artikelen, eigen rubriek), Hans Daale (hbo), Wim Laaper (havo/vwo en mto), Elzeline de Lange (vmbo) en Jos Tolboom (ict).
Tegen het eind van het cursusjaar heeft Elzeline de Lange helaas haar zeer gewaardeerde redactiewerkzaamheden wegens persoonlijke omstandigheden moeten beëindigen.
De redactie kwam driemaal plenair ter vergadering bijeen. Daarbuiten vergaderde de kernredactie nog eens driemaal. Voorts was er contact met het bestuur van de NVvW.

Inhoud

Een groot deel van de inhoud van Euclides wordt gevormd door afzonderlijke artikelen op het gebied van het wiskundeonderwijs, spontaan ingezonden dan wel op uitnodiging geschreven, zowel informerend, actueel/journalistiek, als opiniërend.
De redactie behandelde in het jaar 2003/2004 een kleine 250 inzendingen, voor een groot deel losse (concept)-artikelen, maar daarnaast ook boekbesprekingen, interviews, redactionele kopij, aankondigingen en mededelingen, NVvW-bestuursbijdragen voor de Verenigingspagina's, en ca. 65 persberichten.

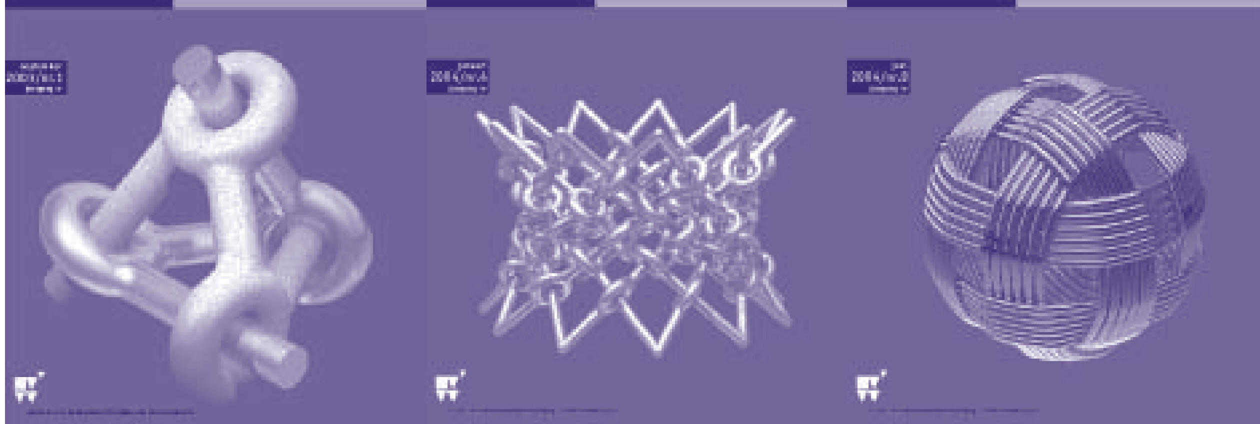
Euclides kende het afgelopen jaar een aantal vaste rubrieken.
De rubriek *Recreatie* werd voortgezet door Frits Göbel.
Martinus van Hoorn leverde opnieuw de bijdragen voor de rubriek *40 jaar geleden*.
Jan van den Brink schreef de vijfdelige serie 'Gesprekken met Sjaak'.
Redacteur Rob Bosch verzorgde weer een rubriek met wiskundige bijdragen, dit jaar onder de titel *RE:cursief*.
Elk nummer werd ingeleid met een 'hoofdredactioneel' door Marja Bos, *Van de redactietafel*, waarin onder meer actuele kwesties kort de aandacht kregen.

Daarnaast waren er een paar onderwerpen die in diverse nummers terugkeerden.
Het *Wereldwiskunde Fonds* deed regelmatig verslag van projecten die financiële steun ontvingen.
Heleen Verhage rapporteerde over prijswinnende inzendingen in het kader van de Wiskunde Scholen Prijs, een uitvloeisel van het *WisKids*-project.
Verder werd aandacht besteed aan 'wiskunde-evenementen' en/of prijsuitreikingen, al dan niet bijgewoond door verslagleggende redactieleden: Wiskunde Olympiade, Vakantiecursus, conferenties, promoties e.d.

Het septembernummer was, zoals de afgelopen jaren gebruikelijk, bijna geheel gewijd aan meest recente wiskunde-eindexamens in het voortgezet onderwijs.
In januari 2004 verscheen de special *Kunst & Wiskunde,* een 84 pagina's tellend themanummer. Deelnemers aan de tiende Nationale Wiskunde Dagen (februari 2004, Noordwijkerhout) ontvingen een gratis exemplaar van deze special.

Publicatieprocedure

Ingezonden bijdragen worden in eerste instantie beoordeeld door de hoofdredacteur. Geaccepteerde bijdragen worden vervolgens door de hoofdredacteur en door enkele andere redactieleden van commentaar voorzien, op grond waarvan de auteur in voorkomend geval om bijstelling verzocht wordt. Daarnaast wordt



[redacted]

voor becommentariëring incidenteel een beroep gedaan op referenten buiten de redactie. De namen van deze incidentele medewerkers worden vermeld op de eerste pagina van het nummer waarvan zij een bijdrage becommentarieerden.
Nadere informatie over de publicatieprocedure en een aantal richtlijnen voor de aanlevering van bijdragen voor Euclides staan sinds vorig jaar vermeld op *www.nvvw.nl/euclricht.html*.

Euclides als Verenigingsorgaan

Euclides is 'vakblad voor de wiskundeleraar', maar tegelijkertijd 'orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren'. Als Verenigingsorgaan kent het tijdschrift daarom een aantal 'geoormerkte' pagina's ten behoeve van het *Verenigingsnieuws*. Het bestuur van de NVvvW kan deze Verenigingspagina's, zonder inhoudelijke bemoeienis en buiten verantwoordelijkheid van de redactie, vrijelijk gebruiken om zich tot de leden te richten. Het afgelopen jaar werd hiervan in zes nummers gebruik gemaakt; viermaal ging het daarbij om een zogeheten *Bestuurstafel*.

Omvang en vorm

De omvang van het blad bedraagt op dit moment in principe 40 pagina's per nummer. Incidenteel werd dit aantal overschreden; de acht nummers van jaargang 79 telden in totaal 376 pagina's.
In aansluiting op het thema 'kunst' van de januari-special was voor de omslagen van deze jaargang gekozen voor ontwerpen van beeldend kunstenaar en wiskundige Rinus Roelofs.
De steunkleur was oranje. Op deze kleur ontving de redactie sterk uiteenlopende reacties, van zeer negatief tot zeer positief. Een beperkt aantal lezers meldde aanvankelijk enige leesbaarheidsproblemen (bijvoorbeeld door de witte letters op een oranje achtergrond in de rubriek *Van de redactietafel*); deze werden echter al snel naar tevredenheid opgelost.
Voor de omslagen van de nieuwe jaargang is inmiddels gekozen voor instrumenten en andere objecten die met 'rekenen' te maken hebben. Dit omslagthema past bij het onderwerp van de eerstvolgende special, te verschijnen in januari 2005.
De nieuwe steunkleur is violet geworden, de huidige lay-out blijft nog een jaar gehandhaafd.

Andere zaken

- Het advertentiebeheer van Euclides lag een deel van het afgelopen jaar in handen van bestuurslid Willem Maas. Vanwege drukke werkzaamheden elders heeft hij deze taak echter beëindigd; de redactie is hem erkentelijk voor zijn inzet. De advertentie-werkzaamheden worden op dit moment tijdelijk waargenomen door redactievoorzitter Gert de Kleuver, die de advertentiewerving en aanverwante activiteiten voortvarend ter hand genomen heeft.
- Op initiatief van de redactie heeft het bestuur van de NVvW twee jaar geleden een begin gemaakt met de archivering van Euclides. Oude en nieuwe jaargangen zullen daartoe op korte termijn opgenomen worden in het Rijksarchief van de Provincie Noord-Holland te Haarlem.
- Een door de redactie in een eerdere fase bijgewerkt redactiestatuut ligt nog ter bekrachtiging bij het bestuur van de NVvW.

Voor en door wiskundedocenten

Wiskundedocenten en andere betrokkenen bij het Nederlandse wiskundeonderwijs vormen een brede doelgroep, ondanks hun gemeenschappelijke affiniteit. Uiteraard streeft de redactie van Euclides ernaar een-ieder uit deze groep een ruime sortering aansprekende, informatieve en lezenswaardige artikelen te bieden. Reacties van de lezers zijn daarom voor de redactie van groot belang – maar ook inhoudelijke inbreng (in de vorm van een artikel voor de collega's in het land) wordt met veel belangstelling door de redactie tegemoet gezien. Stuur daarom uw opmerkingen en bijdragen naar *redactie-euclides@nvvw.nl*.

OMDAT IK HET ZEG!

[Victor Thomasse]

Hij is van de oude stempel en vindt me niet streng genoeg. Bijna met vervroegd pensioen draagt hij een leven vol didactische ervaring met zich mee. Af en toe zit hij bij mij achter in de klas en zet zijn waarnemingen en adviezen daarna onversneden op papier. Als ik ze lees moet ik wel eens slikken. Toch heeft hij vaak gelijk. Zijn aanbevelingen probeer ik dan ook uit te voeren, met wisselend resultaat.

Een probleem heb ik vooral met het jaren-vijftig-sfeertje dat uit zijn schrijfsels naar voren komt. Ik laat mijn dochter van 22 een stukje ervan lezen:
Ook leerlingen zijn het meest gebaat bij een docent die streng is maar ook consequent en rechtvaardig. Jij bent de baas, jij bepaalt wat er gebeurt en op vragen als 'Waarom?' kun je rustig antwoorden: 'Omdat ik dat wil', net zoals bij je eigen kinderen.
Ze moet lachen. 'Dat heb je nog nóóit gezegd, pa!'

Ik denk aan *De Elementen* van Euclides. Heel vaak zegt Euclides daarin dingen als:
Ik zeg dat de zijde AC ook groter is dan de zijde AB.
Maar daarna volgen toch altijd weer argumenten:
Want, als dat niet zo is, dan is AC òf gelijk aan AB òf kleiner.
Nu is AC niet gelijk aan AB; want dan zou…
Sommige dingen kan ook hij niet verder onderbouwen, zoals het bekende postulaat:
Als een lijn twee rechte lijnen snijdt zó, dat de binnenhoeken aan één kant samen kleiner zijn dan twee rechte hoeken, dan zullen die twee lijnen elkaar aan die kant uiteindelijk snijden.
Intussen weten we dat zelfs dit een keuze is en dat het ook anders kan, bijvoorbeeld in de elliptische of hyperbolische meetkunde.

Wiskunde is nou net géén vak waarbij de dingen zo zijn omdat je Franse woordjes nu eenmaal zo vervoegt, of omdat het nu eenmaal in 1822 gebeurd is, of omdat boekhouders die journaalpost nou eenmaal altijd zo doen. Bij wiskunde heb je een potloodje nodig, een papiertje en een hoekje om logisch na te denken. Iedere stap is logisch en volgt uit de vorige. Je hebt alleen gezond verstand nodig - en dat is er, om met Descartes te spreken, in overvloed. Immers:
Van alles op de wereld is gezond verstand wel het eerlijkst onder de mensen verdeeld. Want iedereen vindt dat hij er goed mee bedeeld is. Zelfs mensen die al gauw klagen dat ze te kort zijn gedaan vinden, meestal allerminst dat ze méér gezond verstand nodig hebben dan ze al hebben.

Dus als ik de adviezen van mijn begeleider strikt opvolg, krijg ik wel heel hybride lessen. Bij alles wat ik vertel, kan ik dan een beroep op het gezond verstand doen, behalve bij de gedragsregels: die postuleer ik gewoon.

Over de auteur

Victor Thomasse (e-mailadres: v.thomasse@chello.nl) haalde zijn bevoegdheid Nederlands al in 1983, maar is daarna vooral in het bedrijfsleven actief geweest. Sinds een jaar werkt hij weer in het onderwijs en heeft intussen de eerstegraads opleiding wiskunde afgerond. Momenteel volgt hij de lerarenopleiding natuurkunde.

INHOUD VAN DE 79E JAAARGANG 2003 - 2004

Interviews

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Notulen van de Algemene vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

op 15 november 2003 in het Cals College te Nieuwegein

[Wim Kuipers]

Opening

De voorzitter Marian Kollenveld opent op haar geheel eigen wijze de vergadering. Ze spreekt haar dankbaarheid uit over het feit dat weer velen gekomen zijn om als collega's inspiratie te ontlenen voor het werk van alle dag.
In de jaarrede is dit jaar veel ruimte gegeven aan de op handen zijnde ontwikkelingen ingezet door de plannen van de minister tot herziening van de Tweede fase. Veel overleg was noodzakelijk om de plaats van wiskunde in de herziening veilig te stellen. Samen met andere bèta-organisaties, buiten en binnen het onderwijs, werd op de plannen gereageerd. Het blijft jammer dat we niet in een eerder stadium bij de besluitvorming waren betrokken. Het bestuur zal zich blijven inzetten om de docenten op het juiste niveau als gesprekspartner geaccepteerd te krijgen. We hebben elkaar nodig om er samen voor te zorgen dat de leerlingen verantwoord wiskundeonderwijs ontvangen in onze maatschappelijke context.
Veel docenten zijn betrokken in activiteiten die de deskundigheid bevorderen. Dank aan velen die in het afgelopen jaar op een of andere wijze zich belangeloos hebben ingezet. Zie de jaarrede in Euclides 79-4, p. 204, januari 2004.

Verslagen

De notulen van de jaarvergadering van 2002 kunnen onder dank aan de secretaris worden vastgesteld. Van de gelegenheid om vragen te stellen wordt geen gebruik gemaakt.
Het jaarverslag geeft een beknopte samenvatting van datgene wat in het verenigingsjaar aan de orde is geweest voor wat betreft activiteiten en werkzaamheden.
De penningmeester geeft een toelichting op de jaarrekening en begroting. Het dubbeldik januarinummer van Euclides, een special gewijd aan het thema Kunst & Wiskunde, zal worden betaald uit het Vredenduinfonds.
De penningmeester stelt voor om de contributie voor het komende jaar vast te stellen op € 45,00. De vergadering gaat hiermee akkoord. Het bestuur wil graag dat er meer jonge wiskundedocenten lid van de vereniging worden. De gemiddelde leeftijd van de leden is 50 jaar. Ze wil graag voor een actieve ledenwerfactie € 10 000,00 reserveren. De kascommissie heeft een gunstig rapport uitgebracht na de controle van de boeken. De voorzitter vraagt de vergadering om de penningmeester te dechargeren. Positieve beantwoording volgt door middel van applaus.

Bestuursverkiezing

Metha Kamminga is aan de beurt van aftreden, maar stelt zich herkiesbaar. De vergadering gaat akkoord met de herbenoeming. Metha vertegenwoordigt het bestuur in alle hbo-aangelegenheden.

Erelid

Wim Kleijne wordt op handige wijze voor een ogenblik afgeleid en verlaat de zaal. Dat geeft de voorzitter de gelegenheid om aan de vergadering te vragen hem tot erelid te bevorderen. Wim gaat met pensioen en zijn verdiensten in het verleden voor het wiskundeonderwijs zijn groot. De voorzitter wijst op een aantal werkzaamheden en op zijn niet aflatende inzet. De vergadering stemt uitbundig in met de bevordering tot erelid. Na geroepen te zijn ontvangt Wim in dankbaarheid deze bevordering. Hij

Agenda van het huishoudelijk gedeelte van de jaarvergadering van de NVvW op zaterdag 6 november 2004

10:00-10:50u

1. Opening door de voorzitter, Marian Kollenveld.
2. Jaarrede van de voorzitter.
3. Notulen van de vergadering van 2003 en jaarverslag van het afgelopen verenigingsjaar (zie dit nummer).
4. Decharge van de penningmeester, vaststelling van de contributie.
5. Benoeming van een nieuwe kascommissie.
6. Bestuursverkiezing. Het bestuur stelt de vergadering voor om in de plaats van Heleen Verhage te benoemen drs. Henk van der Kooij, werkzaam bij het Freudenthal Instituut. Aftredend zijn verder Marianne Lambriex en Jacob Hop. Zij stellen zich herkiesbaar en het bestuur stelt voor hen opnieuw te benoemen.

15:45-16:15u

7. Rondvraag. Leden die vragen hebben, wordt verzocht deze tijdens de eerste pauze bij de secretaris schriftelijk in te leveren.
8. Sluiting.

spreekt enkele woorden van waardering en geeft aan dat hij door de benoeming als lid van de Staatsexamencommissie nog betrokken blijft bij het wiskundeonderwijs.

WisKids

Heleen Verhage legt uit waarom de studiedag het thema 'WisKids geeft wiskunde kleur' meegekregen heeft. WisKids heeft als doel het bevorderen van enthousiasme voor wiskunde bij jongens en meisjes van 10 jaar en ouder. Tevens wil WisKids het imago van wiskunde verbeteren.
Na tweeëneenhalf jaar is er een punt gezet achter het WisKidsproject. De deelprojecten zullen zich deze dag presenteren. Een aantal activiteiten houden niet op maar gaan zelfstandig door.
Prof. Van der Blij krijgt de gelegenheid de scholenprijs uit te reiken. Het is het resultaat van de Veelvlakkenprijsvraag van Pythagoras en Ars et Mathesis. Activiteiten als deze worden door leerlingen en studenten als inspirerend ervaren. In een geestige toespraak worden de leerlingen toegesproken.
Marco Swaen verzorgt dit jaar de hoofdlezing als inleiding op de studiedag. Hij laat zien dat waar het abstract denkvermogen te kort schiet het werken met concreet materiaal, karton, hout, computer e.d., ondersteunend kan zijn om het probleem zijn geheim te ontfutselen.

Rondvraag

Hans van Lint vraagt of het niet zinvol is om in een errata-boekje de fouten in de Zebra's te vermelden. Tevens zou het zijn nut kunnen hebben dat er een oplossingenboekje komt voor de leerlingen.
Tenslotte wordt gevraagd naar het feit waarom er geen regionale vergaderingen meer zijn. De laatste jaren is de belangstelling sterk afgenomen. Er zijn vele vormen van nascholingen en bijscholingen die hetzelfde doen wat we op de regionale bijeenkomsten te bieden hadden.

Sluiting

Op de afgesproken tijd kan de voorzitter de dag afsluiten. Ze bedankt voor de voortreffelijke verzorging door het personeel van het Calscollege.
De indruk is dat we een inspirerende studiedag hebben gehad. Velen van ons hebben voor de praktijk in de klas ideeën op kunnen doen.
De voorzitter wenst ieder op de werkplek veel plezier in het lesgeven onder misschien niet altijd gelukkige omstandigheden.

Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 2003 - 31 juli 2004

[Wim Kuipers]

Bestuur

Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld:
mw.drs. M.P.Kollenveld, voorzitter; W. Kuipers, secretaris; drs. S. Garst, penningmeester.
Overige leden: H. Bijleveld, J. Hop, mw.drs. M. Kamminga, mw.drs. M.A. Lambriex, W. Maas, H. Rozenhart en mw.drs. H.B. Verhage.
Inmiddels hebben Heleen Verhage en Willem Maas het bestuur verlaten vanwege het feit dat andere werkzaamheden niet meer vielen te combineren met het bestuurslidmaatschap. Voor Heleen hebben we in drs. Henk van der Kooij een goede opvolger weten te vinden. De ledenvergadering zal om goedkeuring worden gevraagd.
Ter vervanging van Willem Maas zal nog een oproep worden geplaatst.

Algemeen

In dit verslagjaar hebben de ontwikkelingen rond de Tweede fase en de vernieuwing van de basisvorming in de schijnwerpers gestaan.
Veel tijd heeft het bestuur geïnvesteerd om met anderen de plannen van de minister van commentaar te voorzien. Het bestuur is van mening dat de aandacht van de politiek voor de bètavakken onvoldoende honoreert het feit dat ons land achterop dreigt te raken in de vaart der volken.
De wijze van omgaan met de herijking zorgt voor veel onrust onder de docenten.
Het bestuur prijst zich gelukkig niet alleen te staan in het kritisch volgen van de ontwikkelingen. Veel werk mocht in gemeenschappelijkheid worden gedaan, met name te noemen o.a. het Koninklijk Wiskundig Genootschap, de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde en niet te vergeten het bedrijfsleven.

Jaarvergadering

De jaarvergadering/studiedag werd gehouden in het Calscollege te Nieuwegein. Het thema was dit jaar 'WisKids geeft wiskunde kleur'.

De ochtendlezing, ‘Veelvlakken tussen studeerkamer en hobbyschuur’, werd verzorgd door Marco Swaen. Pythagoras heeft een jaargang aandacht geschonken aan de wondere wereld van de veelvlakken. Marco wist zijn gehoor te boeien met de geheimen van deze wondere wereld.
De prijsuitreiking van de veelvlakkenprijsvraag van Pythagoras en Ars et Mathesis werd door niemand minder dan prof. Fred van der Blij verricht.
Voor WisKids is een consortium opgericht van drie beroepsverenigingen waarvan de NVvW er één is naast het WG (Wiskundig Genootschap) en de NVORWO (Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde-Onderwijs). Het bestuur is uiterst tevreden over de uitvoering van de doelstelling, het bevorderen van enthousiasme voor wiskunde bij jongens en meisjes van tien jaar en ouder. Juist voor de lespraktijk van alle dag hebben alle deelprojecten een bijdrage willen leveren om wiskundeonderwijs een kleur te geven.
Dr. Leo Prick nam de slotrede voor zijn rekening. Een boeiende spreker deelde met ons zijn inzichten en denkbeelden over de huidige ontwikkelingen in en rond het onderwijs en de plaats daarin van de bètavakken.
Een jaarvergadering/studiedag waar we met grote tevredenheid op terug mogen zien, aangenaam en bruikbaar.

Basisvorming

Het bestuur heeft de ontwikkelingen rond de vernieuwing van de basisvorming getaxeerd als een poging om meer samenhang te brengen tussen de vakken, een versnippering tegen te gaan. Uiteindelijk is het leven één en zal een leerling dienen te ervaren dat wiskunde niet alleen leuk is maar te maken heeft met de wereld om je heen.

Vmbo

Voor wat betreft de leerweg BB is het bestuur van mening dat er een andere vorm van examinering dient te komen. De examens worden in het veld als te gemakkelijk ervaren. Doch minstens zo belangrijk is de vraag of deze wijze van examinering nog wel adequaat is voor deze leerlingen. In het algemeen is de leerstof voor deze leerlingen te weinig gericht op zelfredzaamheid en gecijferdheid.
De vmbo-werkgroep heeft het bestuur geadviseerd om bij het ministerie aan te dringen op een andere opzet van de examens. Veel duidelijker moet er aansluiting zijn met de sector waarvoor een leerling heeft gekozen. Na twee jaar van algemene wiskundige vorming, met de nadruk op gecijferdheid, zal een leerling moeten kunnen kiezen voor een traject waar de wiskunde veel meer is toegesneden op de sectorkeuze.
Het bestuur heeft een brief gestuurd aan het ministerie met betrekking tot de keuze die gemaakt moet worden uit de domeinen. De werkgroep vmbo adviseerde het bestuur om het ministerie te vragen de regeling op te heffen dat afwisselend uit het examenprogramma voor vmbo, òf meetkunde òf informatieverwerking/statistiek aan de beurt is.
Over een aanpassing van de eindtermen zal het bestuur in het komende verslagjaar contact opnemen met de CEVO.
Het ministerie heeft helaas tot nu toe geen reactie gegeven op onze vraag.
Het bestuur is betrokken geweest bij het tot stand komen van het vakdossier vmbo wiskunde. De adviezen zullen door de werkgroep vmbo nog worden bekeken en van commentaar worden voorzien. De conclusies in het dossier zullen voor het bestuur bouwstenen kunnen zijn voor het maken van beleid.

Havo/vwo

De Tweede Kamer heeft in hoofdlijnen de voorstellen van de minister overgenomen. Een aantal zaken zijn doorgeschoven naar de profielcommissies.
Het bestuur heeft zich ingespannen om invloed uit te oefenen op de samenstelling van de profielcommissies voor de maatschappij- en natuurprofielen. Die commissies moeten de minister adviseren over de inhoud en samenhang van de profielvakken en over de doorstroming naar het hoger onderwijs. Het bestuur acht het niet zonder belang dat er ook docenten deel uitmaken van deze commissies aangezien zij de praktijk van binnenuit het best verstaan. Op vele manieren is het bestuur in de weer geweest om te protesteren tegen de plannen van het ministerie. De winst van de inspanningen is dat het ministerie ook de Vereniging als serieuze gesprekspartner is gaan zien. In het bijzonder kan worden opgemerkt dat de voorzitter dit jaar veel tijd heeft geïnvesteerd in het mobiliseren van het veld om in gezamenlijkheid actie te ondernemen. Minder uren, andere leerstof en dus ook een ander examen zijn voortdurend onderwerp van gesprek geweest. De plannen hebben verstrekkende gevolgen omdat de leerlingen in de nieuwe voorstellen volstrekt onvoorbereid zijn op een vervolgstudie en de positie van onze jongeren internationaal zal verslechteren en daarmee de concurrentiepositie van ons land.
De gedachten van het bestuur en andere organisaties hebben in Euclides ruimschoots aandacht gehad. Zie o.a. Euclides nummer 1, jaargang 79 (september 2003).

‘wiskunde is niet alleen leuk...’

Het bestuur heeft de havo/vwo-werkgroep om advies gevraagd over de mogelijke inhoud van de vijf nieuwe wiskundevakken in de profielen. De werkgroep heeft in juni 2004 een eerste notitie op dit punt op tafel gelegd. De inhoud van de notitie zal nog bespreking vragen in het veld.

Mbo/hbo

De werkgroep HBO heeft contact gehad met het Platform Beroepsonderwijs. Het bestuur is dankbaar dat de werkgroep de knelpunten heeft geformuleerd ten aanzien van de doorstroming van het beroepsonderwijs. Een groot deel van de knelpunten zijn terug te voeren op het gebrek aan formulevaardigheid van binnenkomende studenten. Studenten raken gefrustreerd en vinden de opleiding te theoretisch of het is te moeilijk. Over bovenstaand probleem heeft het bestuur mee gediscussieerd op het minisymposium van het Nederlands/Belgisch Mathematisch Congres te Tilburg in april 2004.

Ledenwerving

Het bestuur acht het juist van belang dat jonge en oudere collega's hun ervaringen delen. Er is onder docenten veel expertise die we met elkaar kunnen delen.
Het bestuur is begonnen contact te leggen met lerarenopleidingen om studenten te overtuigen van het nut om lid te worden van de Vereniging. Als een student zich aanmeldt dan is hij/zij gedurende de lopende jaargang gratis lid en ontvangt derhalve Euclides. Met enkele deskundigen is het bestuur in gesprek om na te gaan waar we dingen kunnen doen die niet door anderen reeds worden gedaan. De vernieuwde website zal mogelijk een bijdrage leveren in het toegankelijk maken van bruikbaar materiaal.
Het bestuur wil de dingen die we al doen optimaliseren.

Euclides

Ook in dit verenigingsjaar mocht ons blad Euclides met inspanning van velen een bijdrage leveren aan het inspireren van de afzonderlijke docent. Goede artikelen ondersteunden ons werk in de praktijk van elke dag.
De redactie is er in geslaagd om de leden goed op de hoogte te houden van de ontwikkelingen zoals we ze in het afgelopen jaar hebben mee gemaakt. Niet onvermeld mag blijven het dubbelnummer over Kunst & Wiskunde.

Website

Het bestuur heeft door een deskundig bureau een analyserapport laten opstellen met betrekking tot de restyling van de website. Het rapport is gemaakt na overleg met de webmasters.
De bedoeling is het maken van een nieuwe website met daarbij een duidelijke en uniforme huisstijl. Het doel van het project is om een eenduidige naslag-website te maken waarmee leraren en deelnemers (docenten/examinatoren) aan een centraal examen snel over informatie kunnen beschikken die voor hen relevant zijn. De uitvoering van het een en ander is reeds in volle gang. Het bestuur hoopt op de jaarvergadering van 2004 het geheel te kunnen presenteren.

WwF

Het bestuur is dankbaar dat ook dit jaar aandacht mocht worden gegeven aan een aantal projecten in Kenia en Zambia. Ondersteuning van wiskundeonderwijs in landen van de Derde Wereld blijft een goede zaak en verdient onze aandacht.

Examenbespreking

De examenbesprekingen voorzien nog steeds in een behoefte. Het bestuur heeft echter besloten om de bespreking van de vmbo-BB-examens niet voort te zetten. Er is te weinig belangstelling voor.

Tot slot

Met dank ziet het bestuur terug op de goede contacten met andere spelers in het veld.
Het was een jaar waar veel aandacht geschonken moest worden aan het gehoor krijgen bij de overheid om samen met anderen onze bezwaren tegen op handen zijnde veranderingen op tafel te krijgen. Gelukkig werd er geluisterd, hoewel het op dit moment nog niet op alle punten tot honorering heeft geleid.
Het bestuur weet dat haar werkzaamheden onderdeel mogen zijn van de inspanning van alle docenten die de wiskunde een warm hart toe dragen in het belang van onze leerlingen.

Puzzel 802 - Diophantos en de centicubes

Er is een leermiddel dat bestaat uit plastic kubusjes van precies 1 cm^3 (zie figuur 1). Ze worden centicubes genoemd (met Engelse uitspraak) of ook wel centikuben (op z'n Nederlands). Ze kunnen aan elkaar worden geklikt. Er behoren ook staafjes van 1×1×10 bij en plakken van 1×10 ×10. De bedoeling is dat de kinderen begrippen als lengte, oppervlakte en volume leren kennen, en daarbij ook leren tellen en vermenigvuldigen. Voor de formulering van de opgaven hebben wij alleen de centicubes nodig.



FIGUUR 1

Opgave 1

Bepaal alle rechthoekige blokken van centicubes waarbij er evenveel centicubes aan de buitenkant zitten als binnenin.

Ter verduidelijking geef ik de oplossing van het tweedimensionale geval. De rechthoek van 5×12 heeft 3×10 vierkanten binnenin en dus 5×12 – 30 = 30 'randstukjes'. Iets dergelijks geldt voor 6×8, en andere oplossingen zijn er niet. Terug naar de derde dimensie. De kubus van Rubik meet 3×3×3 en heeft dus 26 maal zoveel kubusjes buitenop als binnenin. Dit leidt onvermijdelijk tot de volgende opgave.

Opgave 2

Bepaal alle gehele waarden van k waarvoor een rechthoekig blok bestaat met k maal zoveel centicubes aan de buitenkant als binnenin.

Hier wordt dus niet gevraagd naar de afmetingen van de rechthoekige blokken; het is voldoende als u de waarden van k geeft waarvoor ten minste één oplossing bestaat. (We weten al dat 1 en 26 in dit rijtje thuis horen.)

Opgave 3

Het kan ook andersom: binnenin k maal zoveel als aan de buitenkant. Dit blijkt voor alle natuurlijke getallen een oplossing te hebben. Bepaal voor het speciale geval $k = 3$ het aantal oplossingen en geef ook de afmetingen van de blokken waarin de langste ribbe maximaal respectievelijk minimaal is.

Bij het oplossen merkt u vanzelf waarom Diophantos in de titel wordt genoemd. Weet u overigens dat de ingeklede vergelijking die op zijn grafsteen staat, helaas geen diofantische vergelijking is? Het is gewoon een lineaire vergelijking met één onbekende. Op de grafsteen zou namelijk staan (na bewerking van een vertaling):

Hier ligt Diophantos.
Het graf vertelt op wetenschappelijke wijze zijn leeftijd. God liet hem een zesde deel van zijn leven een jongen zijn. Na nog een twaalfde deel begon zijn baard te groeien, en na nog een zevende deel trouwde hij.
Na vijf huwelijksjaren kreeg hij een zoon, die (helaas!) maar half zo oud werd als de vader.
Zich troostend met de wetenschap der getallen leefde Diophantos nog vier jaar.

Oplossingen van de drie opgaven kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing. De deadline is 11 november 2004.

Veel plezier!

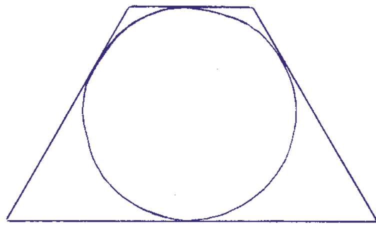
Oplossing 'Cirkels en bollen'

De verhouding van twee opvolgende stralen (de kleinste voorop) is $\frac{1-\sin\frac{1}{2}\alpha}{1+\sin\frac{1}{2}\alpha}$ in opgave 1 en $2-\sqrt{3}$ in opgave 3.

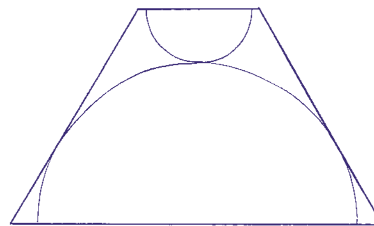
In opgave 2 vroeg ik naar de fractie van het inwendige van een hoek die door cirkels wordt bedekt. Mijn bedoeling was een verdeling van de figuur in gelijkvormige stukken zoals in figuur 2, maar een andere verdeling, bijvoorbeeld als in figuur 3, zou natuurlijk ook goed zijn.

Na de inzending van Wobien Doyer (al op 28 juni) kwamen er nog tien: L. van den Raadt, Ruud Stolwijk (die de instapopgaven correct oploste en verder volstond met opgave 1), Ton Kool (die de opgaven 1 en 3 ook voor dimensie *n* deed), Arie Verheul, Jan Meerhof, Niels Wensink, Lieke de Rooij, Theo Buurman, Heiner Wind en Wim van den Camp.

Alle inzenders krijgen 20 punten, behalve R.S. die er 10 krijgt. En W.D. mag wel 5 punten extra krijgen, vind ik.



FIGUUR 2



FIGUUR 3

Maar Wobien Doyer ontdekte dat de bedekte fractie afhangt van de gekozen verdeling! Zij bepaalde eerst de fractie voor figuur 2, en vervolgde: 'Omdat deze verhouding voor alle trapeziums hetzelfde is, geldt hij ook voor een reeks gelijkbenige driehoeken die worden gevormd door de hoek en als basis steeds een volgende raaklijn. Eerst dacht ik dat het dus ook de fractie van het inwendige van de hoek is die door de cirkels wordt bedekt. Dit is echter niet zo. Het inwendige van de hoek is een oneindig groot oppervlak. We kunnen hier iets over zeggen door dit oppervlak te benaderen door een reeks eindige oppervlakken. Maar dan moeten we wel zeker zijn dat onze uitkomst niet afhangt van de gekozen reeks. Aan die voorwaarde is hier niet voldaan. Dat komt omdat de stukken die we bij elke stap toevoegen steeds groter worden.'
Vervolgens bepaalde zij de verhouding voor figuur 3, en daar blijkt inderdaad een ander getal uit te komen. Bij opgave 4 treedt hetzelfde probleem op.
Dit had ik natuurlijk zelf moeten bedenken! Een betreurenswaardige fout. Maar wel een erg leuk voorbeeld van een limiet die niet bestaat!

De top van de ladder ziet er nu als onderstaand uit:

D. Buijs - 214
T. Afman - 200
L. de Rooij - 197
A. Verheul - 193
L. van den Raadt - 155
J. Meerhof - 134
T. Kool - 128
W. Doyer - 102

Kalender
In deze kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (*redactie-euclides@nvvw.nl*).
Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de komende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen (en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*).

nr	verschijnt	deadline
3	9 december 2004	26 oktober 2004
4	27 januari 2005	7 december 2004
5	3 maart 2005	18 januari 2005
6	14 april 2005	1 maart 2005
7	26 mei 2005	5 april 2005
8	23 juni 2005	10 mei 2005

woensdag 27 oktober, Enschede
Twentse wiskunde estafette 2004
Organisatie Universiteit Twente

do. 28 en vr. 29 oktober, Nijmegen
Nijmeegse Wiskunde Tweedaagse
Organisatie Radboud Universiteit Nijmegen

woensdag 3 november, Utrecht
Cursus Algebra en ICT (ook op 8 december)
Organisatie Freudenthal Instituut

zaterdag 6 november, Nieuwegein
NVvW Jaarvergadering/Studiedag
Organisatie NVvW
Zie pag. 034 e.v. in Euclides 80-1

dinsdag 9 november, Utrecht
Cursus Leerlingen uit 3/4 vmbo met reken/wiskundeproblemen (ook op 14 december)
Organisatie Freudenthal Instituut

dinsdag 16 november, Nijmegen
1e dag Nascholingscursus ‘Wiskundig denken bevorderen’
Organisatie Ratio
Zie advertentie in Euclides 80-1.

zaterdag 20 november, Baarn
Ars et Mathesis-dag
Organisatie Stichting Ars et Mathesis

zaterdag 20 november, Brussel (B)
Studiedag Uitwiskeling Live
Organisatie Tijdschrift Uitwiskeling
Zie pag. 005 in Euclides 80-1.

woensdag 24 november, Amersfoort
Werkconferentie Beoordelen en begeleiden van praktische opdrachten
Organisatie APS
Zie advertentie elders in dit blad.

do. 25 t/m zo. 28 november, Utrecht
15th Novembertagung on the History of Mathematics
Organisatie Universiteit Utrecht

vrijdag 26 november, op de scholen
Wiskunde A-lympiade/Wiskunde B-dag
Organisatie Freudenthal Instituut

dinsdag 21 december, Groningen
Studiedag: Wiskunde, dienstmaagd of koningin
Organisatie RuG

dinsdag 21 december, Utrecht
Studiedag onderwijs aan (hoog)begaafden
Organisatie SLO

zaterdag 8 januari 2005, Utrecht
Wintersymposium Wiskunde en Verkeer
Organisatie Koninklijk Wiskundig Genootschap

woensdag 19 januari 2005, Ede
3e Reehorstconferentie wiskunde
Organisatie APS
Zie verder ook de advertentie elders in dit blad.

woensdag 19 januari 2005, Amsterdam
Nascholingscursus Simulatie op TI-83 en PC
Organisatie vakgroep Econometrie VU, Amsterdam

woensdag 26 januari 2005
Conferentie Practische ICT-toepassingen wiskunde
Organisatie APS
Zie verder ook de advertentie elders in dit blad.

vr. 4 en za. 5 februari 2005, Noordwijkerhout
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie Freudenthal Instituut

Voor nascholing zie ook
www.nvvw.nl/nascholing.html

Voor overige internet-adressen zie
www.nvvw.nl/Agenda2.html

Voor Wiksundeonderwijs Webwijzer zie
www.wiskundeonderwijs.nl

Publicaties van de
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



* *Zebra-boekjes*
1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto’s, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christaan Huygens

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW.
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (*www.nvvw.nl/lustrumboek2.html*).

Voor overige NVvW-publicaties zie de website:
www.nvvw.nl/Publicaties2.html